

**Theorie und Anwendung
der Strömungsdoppelbrechung
bei direkter interferometrischer Messung
in nicht-Newtonschen Strömungen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

– genehmigt von der Abteilung für Maschinenbau –
der Ruhr-Universität Bochum

von

EDGAR SCHMITZ

aus Wuppertal

Bochum 1983





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546428_0004

**Theorie und Anwendung
der Strömungsdoppelbrechung
bei direkter interferometrischer Messung
in nicht-Newtonschen Strömungen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

– genehmigt von der Abteilung für Maschinenbau –
der Ruhr-Universität Bochum

von

EDGAR SCHMITZ

aus Wuppertal

Bochum 1983

Referent: Prof. Dr. rer.nat. W.Merzkirch

Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. K.Gersten

Prof. Dr. R.Darby

Tag der mündlichen Prüfung: 23.Okt.1983

Die folgende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermo- und Fluidodynamik der Ruhr-Universität Bochum. Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich hiermit meinen Dank aussprechen. Dies gilt besonders für die Betreuung durch den Leiter der Arbeitsgruppe Experimentelle Gasdynamik, Herrn Prof. Dr. rer.nat. W.Merzkirch, den Leiter des Instituts Thermo- und Fluidodynamik, Herrn Prof. Dr.-Ing. K.Gersten und Herrn Prof. Dr. R.Darby, Department of Chemical Engineering an der Texas A&M University in Collage Station, Texas, USA, die als Referent und Korreferenten die Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben.

	Inhaltsverzeichnis	Seite
1.	Einleitung	1
2.	Prinzip der Doppelbrechung	4
2.1	Einachsiger Kristall	4
2.2	Doppelbrechende Fluide und optische Meßverfahren	7
3.	Die wässrige Farbstofflösung Milling Yellow , Eigenschaften , Einflußfaktoren	12
4.	Die Theorie der Strömungsdoppelbrechung	16
4.1	Teilchenform	17
4.2	Teilchenrotation, Hydrodynamisches Modell	18
4.2.1	Waylandsche Theorie der Strömungsdoppelbrechung	18
4.2.2	Theorie von Boeder	20
4.3	Diffusionsgleichung der Teilchenrichtungsichte	22
4.4	Polarisationstheoretische Behandlung der Brechungs- indices	27
4.5	Erweitertes Modell der Diagonalendrehung eines Fluidteilchens im allgemeinen 2 D - Scherfeld	32
4.6	Brechungsindices in Abhängigkeit von der Volumen- konzentration	41
5.	Anwendung der Ergebnisse der Theorie bei einfacher Scherung	42

5.1	Der experimentelle Versuchsaufbau	44
5.1.1	Strömungskreislauf	44
5.1.2	Das optische System	45
5.1.3	Ringspaltpolariskop	47
5.1.4	Einrichtung zur Messung des statischen Druckes	48
5.2	Optische Bestimmung der Geschwindigkeitsprofile	49
5.3	Bestimmung des Viskositätsverlaufes	53
6.	Anwendung der Ergebnisse der Theorie bei allgemeiner 2 D - Scherung einer kolloidhaltigen Lösung	56
6.1	Versuch einer Begründung für das Problem, die allgemeine 2 D -Strömung einer doppelbrechenden kolloida- len Flüssigkeit numerisch zu berechnen	56
6.2	Vergleich einer berechneten Verteilung von Interferenz- linien einer doppelbrechenden Kolloidlösung mit dem Liniensystem einer MY- Lösung	58
7.	Fehlerbetrachtung	61
7.1	Experimentelle Meßfehler	61
7.2	Fehler der Näherungsfunktion	62
8.	Diskussion der Ergebnisse	64
9.	Zusammenfassung	67

10.	Tabellen der Meßwerte und der Ergebnisse	68
10.1	Bestimmung der Rotationsdiffusionskonstanten	68
10.2	Eichung der Durchflußmeßgeräte	69
10.2.1	Geräteangaben	69
10.2.2	Meßwerte	69
10.2.3	Eichkurven der Durchflußmeßgeräte	71
10.3	Druckabfall in der 2-Plattenströmung	72
10.4	Interferenzlinienordnung in der 2-Plattenströmung und Ergebnisse der optischen Geschwindigkeits- bestimmung	73
10.5	Ergebnisse der Viskositätsbestimmung	77
10.5.1	Messung des Druckabfalls in der 2-Plattenströmung	77
10.5.2	Messung der Interferenzlinien in der 2-Plattenströmung	80
10.5.3	Viskosimetrische Messungen	84
11.	Literaturverzeichnis	88
12.	Mathematischer Anhang	90
12.1	Lösung der Dgl der Teilchenrichtungsichte	90
12.2	Polarisationstheoretische Behandlung des Verteilungsproblems	93

Nomenklatur

a	Konstante
$a_{1,2}$	Halbachse des Rotationsellipsoides
A	Integralabkürzung
A	Flächenstrom
B	Integralabkürzung
b	Konstante
$2 b_1$	Kanalhöhe
$\vec{c}_c$	Polarisierbarkeit
c	Konzentration
D, D_R	Rotationsdiffusionskonstante
d_1	Wegverschiebung des Punktes A des Scherelementes
D_s	"mittleres Schergefälle"
d	geometrische Dicke, Durchstrahltiefe
E'	"innere" Feldstärke, am Ort des Teilchens wirkend
E	Feldstärke des Lichtvektors
g	Konstante
I	Intensität des Lichtstrahls
k_1, k_2, k_3	Konstanten
K	optischer Weg
l	Länge
M	Masse
N_T	Teilchenzahl
N	Interferenzlinienzahl
n	Brechungsindex
$\vec{p}$	Teilchenpolarisation
P	Volumenpolarisation
p	Druck
R, r	Radius
$\bar{r}$	mittlerer Radius des Kristallteilchens
Re	Reynolds-Zahl, $Re = (\bar{u} 2b_1 \rho) / \eta$
t	Zeitkoordinate
u	Geschwindigkeitskomponente
v	Geschwindigkeitskomponente
w	Geschwindigkeitskomponente
x	Ortskoordinate
y	Ortskoordinate
z	Ortskoordinate

$\rightarrow$	Vektor, Tensor
$-$	Mittelwert
Δ	Differenz
$1'2$	Kennzeichnung der Vorzugsrichtungen

Indices und Abkürzungen

a.o.	außerordentlicher Strahl
o.	ordentlicher Strahl
Br.	Brownsche Diffusion
D	dimensional
Dgl	Differentialgleichung
L	Lösung (MY)
MY	Milling Yellow
R	Rand
R.F.	Reine Farbpartikel
Str.	Strömung
$\alpha = \beta/D$	dimensionslose Scherrate
β	Geschwindigkeitsgradient
γ	Resultierende der Teilchenpolarisation
ϵ	Dielektrizitätsgröße
ϵ	Schergeschwindigkeit
δ	Winkel
∂	Differential
ϕ	Phasendifferenz
ϕ, θ	Winkel (Raumelement)
ξ	transformierte Ortskoordinate
η, η_s	Zähigkeit, scheinbare Zähigkeit
ρ	Stoffdichte, Teilchenrichtungsichte
λ	Wellenlänge des Lichtes
τ	Schubspannung
Θ	Mathematische Funktion des Brechungsindex
σ	Normalspannung
ω	Winkelgeschwindigkeit
ψ	Auslöschwinkel

1. Einleitung

Ein doppelbrechendes Medium besteht aus Atomen bzw. Molekülen, die anisotrop sind. Die Teilchen müssen eine einheitliche Orientierung aufweisen, wie es in bestimmten Kristallen (z.B. im Calcit) der Fall ist.

Ein eintretender Lichtstrahl wird im doppelbrechenden Medium in zwei linear polarisierte Teilstrahlen mit zueinander senkrechten Polarisationssebenen aufgespalten. Die beiden Lichtwellen haben eine Phasenverschiebung zueinander, die Brechungsindizes besitzen unterschiedliche Werte, diese können mit bestimmten optischen Verfahren als helle und dunkle Linien sichtbar gemacht werden.

In Flüssigkeiten mit optisch anisotropen Teilchen herrscht im Normalfall eine völlig regellose Verteilung der Teilchen vor; es kann jedoch zu einer einheitlichen Ausrichtung kommen, wenn z.B. ein äußeres elektrisches oder magnetisches Feld einwirkt (Kerr-Effekt) oder Scherkräfte die Partikel orientieren.

Nachdem 1873 Mach und Maxwell als Erste unabhängig voneinander die strömungsoptischen Eigenschaften bestimmter Flüssigkeiten beschrieben hatten, wurden in der darauffolgenden Zeit eine Vielzahl flüssiger Stoffe mit mehr oder weniger starker optischer Aktivität gefunden.

U.a. stellte man bei der wässrigen Kolloidlösung eines gelben Farbstoffes (Markenbezeichnung: Alphanolechtgelb H5G (Hoechst) bzw. NGS 1828 (USA)) eine große optische Empfindlichkeit fest. Als vorteilhaft hat sich ihre leichte Handhabung erwiesen. Die Flüssigkeit ist seither unter der Bezeichnung "Milling Yellow", Abk. MY, bekannt.

Da diese Lösung für Strömungsuntersuchungen besonders geeignet ist, wurde sie bei den hier vorgestellten Betrachtungen als Modellflüssigkeit benutzt. Bei kleinen Scherraten zeigt diese Flüssigkeit Newtonsches, bei höheren Scherraten eine starke Ausprägung von nicht-Newtonschem Strömungsverhalten.



In der Literatur findet man viele Beispiele, wie mit Hilfe dieser Flüssigkeit Strömungen sichtbar gemacht worden sind; jedoch kennt man nur wenige Untersuchungen, die auch quantitative Ergebnisse vorweisen (Horsmann, Schmitz, Merzky, 1981; Peebles, Liu, 1965 u.a.).

Ziel der folgenden Arbeit ist es nun zu zeigen, daß mit Hilfe einer erweiterten Theorie von Boeder die Anwendung der Strömungsdoppelbrechung eine brauchbare quantitative Meßmethode darstellt.

Die bisher angewandte Theorie von Wayland beruht auf einer umfangreichen Betrachtung von Peterlin und Stuart (1936). Wayland (1964) gibt einen Zusammenhang an zwischen einem allgemeinen 2D- Geschwindigkeitsfeld, der Differenz $\Delta n = n_1 - n_2$ der beiden Brechungsindizes und einem Winkel ψ_e , der die Lage der Hauptspannungen in Bezug zur Hauptströmungsrichtung des Fluids beschreibt. Δn und ψ_e können über zwei unterschiedliche optische Informationen in die Waylandsche Beziehung eingebracht werden: Die sog. Isochromatenlinien liefern Δn , den sog. Betrag der Doppelbrechung, ψ_e folgt aus der Lage der Lichtschwingung der anisotropen Lösung, die durch die sog. Isoklinenlinien gekennzeichnet ist.

Soweit wie es die vollständige Gleichung von Wayland betrifft, ist somit die Einbringung von zwei optisch unterschiedlichen Informationen notwendig; es zeigt sich, daß die zweite benötigte Information, die Isoklinen, zu ungenau und aufwendig zu erfassen ist. Die Isoklinenabhängigkeit fällt jedoch heraus, wenn die Waylandsche Beziehung, die eine Potenzreihenentwicklung darstellt, auf den linearen Term beschränkt wird, wodurch sich der Anwendungsbereich auf sehr kleine Scherraten (z.B. schleichende Strömung) beschränkt.

Will man zunächst über die Doppelbrechung selbst mehr Informationen gewinnen, so kann man mit Hilfe eines Mach-Zehnder Interferometers die einzelnen Werte der Brechungsindizes (und nicht deren Differenz!) bestimmen. Man stößt bei Anwendung der herkömmlichen Theorie jedoch wieder auf die gleichen

Schwierigkeiten der Einschränkung.

Daher war es nötig, ein geeigneteres theoretisches Modell zu entwickeln. Ausgangspunkt dazu bildete die frühere Betrachtung von Boeder(1932). Boeder untersuchte die Diagonalendrehung eines Fluidelementes bei der Wirkung eines einzelnen Schergradienten senkrecht zur Strömungsrichtung und formulierte Δn als Funktion dieses Gradienten. Bei der Entwicklung auf der Grundlage der Boederschen Vorstellungen stellte sich heraus, daß bei der Beschreibung der Abhängigkeit keine Einschränkung auf kleine Schergradienten erforderlich ist, was bedeutet, daß laminare Strömungen unabhängig von ihrer Form, also auch für nicht-Newtonsches Viskositätsverhalten, beschrieben werden, sofern die optische experimentelle Information in die Beziehung eingebracht wird (Schmitz und Merzkirch, 1983).

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß bei Anwendung des Mach-Zehnder- Interferometers und einer Modifizierung der Boederschen Theorie quantitative Messungen in der ebenen Strömung mit nur einem Schergradienten, aber bei stark nicht-Newton'schem Verhalten der MY-Lösung durchgeführt werden können. Die Richtigkeit dieser Messungen wird durch Vergleichsexperimente mit Viskosimetern und Druckmessungen bestätigt.

Darüber hinaus wird die Boedersche Theorie für den Fall einer allgemeinen 2D- Strömung mit vier Schergradienten erweitert. Die Auswertung der optischen Information mit dem Ziel, die Geschwindigkeitsgradienten der allgemeinen ebenen Strömung zu beschreiben, kann bei vorgegebenen Randbedingungen damit eindeutig erfolgen. Um eine einfache numerische Auswertung zu ermöglichen, wurde die theoretische Abhängigkeit mit Hilfe einer vereinfachten Näherungsfunktion dargestellt und auf eine ebene Düsenströmung angewandt. Entsprechende optische Experimente werden ausgewertet und mit berechneten Strömungsformen verglichen. Dies geschieht aber nur im Newtonschen Bereich, da für nicht-Newtonsche Strömung keine theoretisch berechneten Ergebnisse vorliegen.

2. Prinzip der Doppelbrechung

Die bei Strömungen auftretende Erscheinung der Doppelbrechung kann auf drei verschiedene Ursachen zurückgeführt werden:

- a) Spannungsdoppelbrechung
- b) Orientierungsdoppelbrechung, verursacht durch doppelbrechende Teilchen
- c) Formdoppelbrechung, verursacht durch nicht-kugelförmige Teilchen.

Zum einen kann der innere Spannungszustand einer zähen Flüssigkeit zu einer Materialanisotropie führen. Zum zweiten übt die Strömung auf kleine Partikel von nichtkugelförmiger Gestalt, die in ihr enthalten sein mögen, allgemein einen orientierenden Einfluß aus. Haben die Partikel eine eigene optische Anisotropie, so tritt im Ruhezustand auf Grund der regellosen gleichmäßigen Verteilung diese äußerlich nicht in Erscheinung. Als Summeneffekt der Teilchenorientierung zeigt dagegen das strömende Fluid als Ganzes die doppelbrechende Eigenschaft. Auch für den Fall von isotropem Material kann Doppelbrechung des Fluids auf Grund des Unterschiedes der Brechungsindices von Teilchen und dem sie umgebenden homogenen Medium auftreten. Die Ausprägung hängt ab von der nicht-kugelförmigen Gestalt der Teilchen. Die Effekte können miteinander verknüpft sein.

2.1 Einachsiger Kristall

Als Beispiel für die Eigendoppelbrechung soll der Effekt an einem einachsigen, zweidimensionalen Kristall erläutert werden (Bergmann, Schäfer, 1975). In einem doppelbrechenden Kristall wird ein eintretender Lichtstrahl in zwei senkrecht zueinander polarisierte Teilstrahlen, den sog. "ordentlichen" und den "außerordentlichen" Strahl, aufgespalten. Bei senkrechter Ein- und Austrittsrichtung fallen die beiden austretenden Strahlen räumlich zusammen. Sie besitzen im Medium aber unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Sie treten deshalb mit der relativen Phasendifferenz

$$\Delta \phi / 2 \pi = (d / \lambda) \Delta n \quad (2.1)$$

aus. Hierbei bedeuten d die geometrische Dicke des Kristalls, λ die Wellenlänge des Lichtes und $\Delta n = n_1 - n_2$ die Differenz der beiden Brechungsindices. Bei allgemeiner schiefwinkliger Einstrahlrichtung sind die beiden Strahlen räumlich voneinander getrennt, bei einem ellipsoidförmigem Kristall ist zusätzlich noch eine unterschiedliche Austrittsrichtung vorhanden.

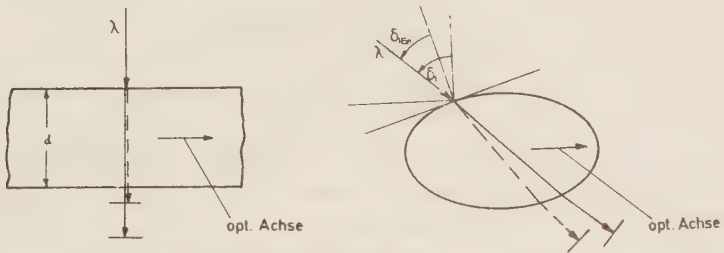


Bild 2: Lichtausbreitung im ebenen und im ellipsoidförmigen einachsigen Kristall

Allgemein ändert sich hierbei der optische Weg K (K gleich Produkt aus geometrischem Weg und Brechungsindex) mit der Durchstrahlrichtung, d. h. K ist abhängig von der relativen Lage des Kristalls bezogen auf das einfallende Licht.

Eine Besonderheit des doppelbrechenden Kristalls besteht darin, daß sich der Brechungsindex n des außerordentlichen Strahles in Abhängigkeit von der Durchstrahlrichtung ändert. Diese Abhängigkeit wird durch das sog. Indexellipsoid gekenn-

zeichnet (Kuske, Robertson, 1974).

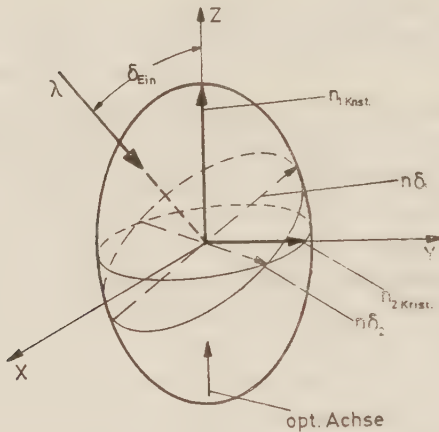


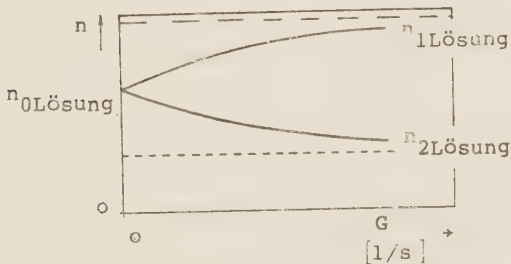
Bild 3: Brechungsindexellipsoid eines einachsigen Kristalls

Läßt man die Durchstrahlrichtung durch den Mittelpunkt des Indexellipsoides laufen und errichtet man dort eine Fläche, die senkrecht auf der Durchstrahlrichtung steht, so bildet diese Fläche mit der Ellipsoidoberfläche einen Schnittkreis oder eine Schnittellipse. Dann kennzeichnen die beiden Halbachsen der Schnittfigur die Werte der beiden Brechungsindices $n_{\delta 1}$ und $n_{\delta 2}$. Ihre Richtungen kennzeichnen die Schwingungsrichtungen der beiden Lichtvektoren. Neben dem Brechungsindex tritt der Durchstrahlweg d in der Formel für den optischen Weg auf. d ist abhängig vom Eintrittswinkel und vom Brechungsindex. Bis hierher zeigt die Betrachtung für den allgemeinen Fall, daß die Bestimmungen der optischen Wege nicht mehr in einfacher Weise überschaubar sind, wenn es sich um eine Vielzahl von hintereinandergesetzten Kristallen mit unterschiedlichen Winkellagen zueinander handelt. Weiterführende Betrachtungen dazu werden in Kap. 4 diskutiert.

2.2 Doppelbrechende Fluide und Auswerteverfahren

Für eine transparente Flüssigkeit, die unter Schereinfluß ihre Brechzahlen ändert, kann für jeden konstanten Strömungszustand ein Ersatzkristall konstruiert werden, der zwei optische Hauptachsen besitzt (Wayland, 1964). Entsprechend dem zweiachsigen Brechungsindexellipsoid treten zwei außerordentliche Strahlen auf. Bei Fluiden mit dieser Eigenschaft handelt es sich oft um Zweiphasensysteme, die äußerlich isotrop erscheinen, mikroskopisch betrachtet jedoch aus einer Vielzahl kleiner Teilchen oder Molekülen bestehen, die häufig Eigenanisotropie besitzen und in einem homogenen Lösungsmittel gelöst oder suspendiert sind. Sind diese Fluide im Ruhezustand makroskopisch betrachtet durch einen isotropen Brechungsindex gekennzeichnet, so prägen sich bei einer Scherbewegung i.a. zwei Brechungsindices aus, deren Differenz mit ansteigenden Geschwindigkeitsgradienten größer wird.

Bild 4 zeigt schematisch die Abhängigkeit der Brechungsindices vom Schergefälle G (Couette-Strömung, laminar), wie sie bei vielen doppelbrechenden Lösungen auftritt.



$$G = \frac{du}{dy}$$

Bild 4: Verlauf der Brechungsindices einer doppelbrechenden strömenden Flüssigkeit (kolloidale Lösung)

Die Änderung der Brechungsindices ergibt sich als Folge der hydrodynamischen Kräfte, die zu einer (Quasi-) Orientierung

der Partikel bzw. der gelösten Moleküle führen; dementsgegen kann die sog. Brownsche Molekularbewegung wirken, die einen regellosen Zustand der Gleichverteilung anstrebt. Es gibt eine Vielzahl verschiedenartiger Flüssigkeiten, die Doppelbrechung zeigen (Jerrard, 1959). Eine Gruppe sind die polymeren Lösungen, deren Molekülketten deformierbar, bzw. elastisch sind. Scherkräfte der Strömung führen zu einer "Entzerrung" und verursachen optische Anisotropie (Janeschütz-Kriegel, 1969). Die zweite Gruppe bilden die kolloidalen Lösungen. Dabei handelt es sich um längliche, überwiegend unverformbare Molekülstrukturen (z.B. Kristalle), die in einem Lösungsmittel (z.B. Wasser) gelöst sind. Unter dem Einfluß von Scherkräften verweilen diese submikroskopisch kleinen Teilchen überwiegend in einer Vorzugsrichtung ihrer Achsenwinkellage.

Um die Phasendifferenz der beiden doppelbrechenden Lichtstrahlen sichtbar zu machen, kann man die beiden Teilstrahlen zur Interferenz bringen. Dies kann erreicht werden mit Hilfe eines sog. Polariskops, das gewöhnlich aus zwei Polarisatoren, dem sog. Polarisator und dem Analysator, besteht.

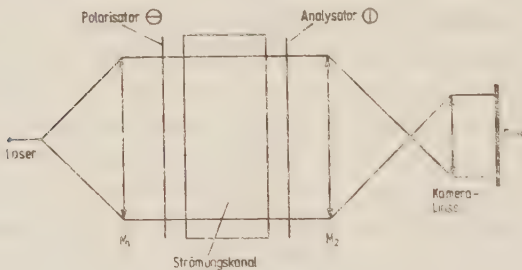


Bild 5: Schema des Durchlichtpolariskops

Der Polarisator bewirkt eine lineare Polarisation des einfallenden Lichtes, der Analysator läßt von den beiden Teilstrah-

len der Doppelbrechung jeweils nur die Komponente in Polarisationsrichtung hindurch. Hinter dem Analysator kann nun Interferenz erfolgen, es treten Interferenzstreifen auf. Wenn Polarisator und Analysator senkrecht zueinander gekreuzt stehen, ergibt sich für die Intensitätsverteilung in einer Abbildungsebene (Bergmann, Schäfer, 1975):

$$I_s = \alpha I_o \sin^2 \left[\pi d (n_1 - n_2) / \lambda \right] \sin^2 \psi \quad (2.2)$$

Hierbei ist I die Strahlintensität, o und s Zustände am Ein- und Austritt, α Materialabsorptionskoeffizient und ψ der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung des Polarisators und der optischen Achse des Kristalls. Das Verschwinden des ersten $\sin^2$ -Terms kennzeichnet das Auftreten von Interferenzstreifen, sog. Isochromaten; wenn der zweite $\sin^2$ -Term zu Null wird, kennzeichnet man die entstehenden Linien als sog. Isoklinen. Man kann mit dem Polariskop also die Differenz $\Delta n = n_1 - n_2$ (Δn sog. Betrag der Doppelbrechung) und die Lage der Anisotropieachsen (sog. Auslöschwinkel ψ) in Bezug zu einer vorgegebenen Richtung bestimmen. Dabei ist es i.a. schwieriger, die Information der Isoklinen (Auslöschwinkel) quantitativ zu verwerten, da sie die Winkeljustierung erfordern und zudem oft eine starke Verbreiterung im Testfluid aufweisen, die die genaue Lokalisation erschweren.

Eine getrennte Bestimmung von n_1 und n_2 wäre nun von Vorteil, um genauere Informationen über die Doppelbrechung selbst zu erhalten. Dies wird mit Hilfe eines sog. Mach-Zehnder-Interferometers erreicht. Der schematische Aufbau ist im Bild 6 zu sehen.

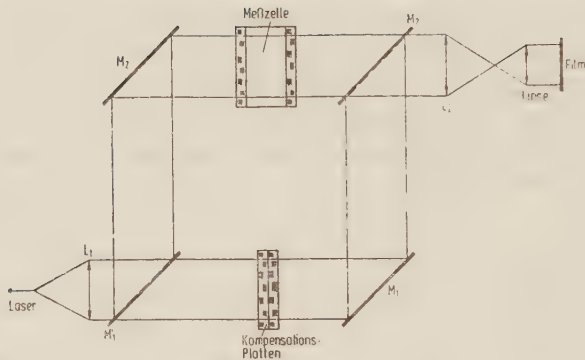


Bild 6: Schema des Mach- Zehnder- Interferometers

Der Lichtstrahl wird am ersten Strahlteiler in zwei Teilstrahlen, den sog. Referenz- und den sog. Objektstrahl, aufgespalten. Nach der Umlenkung durch Spiegel durchsetzt der aufgeweitete, parallel gebündelte Objektstrahl in senkrechter Richtung eine Meßkammerzelle, bevor er am zweiten Strahlteiler mit dem Referenzstrahl zur Interferenz gebracht wird. Dabei erlauben zwei getrennte Austrittsrichtungen die simultane Beobachtung von Interferenzliniensystemen, deren Intensitäten komplementär zueinander sind. Die Intensitätsverteilung eines der beiden Systeme ist:

$$I = I_0 \cos^2 [(n - n_{\text{ref}}) \pi d / \lambda] \quad (2.3)$$

Interferenzlinien kennzeichnen das Verschwinden des $\cos^2$ -Terms.

Durch Polarisation des Objekt- und Referenzstrahles in Richtung einer der beiden optischen Hauptachsen werden die Liniensysteme von n_1 bzw. n_2 getrennt erfaßt. Dabei spielt die genaue Winkelpositionierung des Polarisators keine große Rolle, (wie die Experimente gezeigt haben), da die Polarisation

nur die Unterdrückung eines Liniensystems bewirkt.

Beim Polariskop sind die Beträge $\Delta n = n_2 - n_1$ zwar ungefähr doppelt so groß wie die Beträge $n_{(rel)1,2} = n_{1,2} - n_L$, da n_L zwischen n_1 und n_2 liegt. Die Isochromatenzahl ist also um den Faktor zwei größer als die Zahl der Interferenzlinien des Mach-Zehnder-Interferometers für eines der beiden Systeme. Durch die zwei unabhängig voneinander einstellbaren Liniensysteme ergibt sich jedoch insgesamt die gleiche optische Empfindlichkeit.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß man mit Hilfe der sog. Streulichtmethode (Wolf, 1961) Interferenzlinien sichtbar machen kann, die bei Doppelbrechung von gestreuten Teilstrahlen entstehen und die Information des dreidimensionalen Scherzustandes beinhalten. Diese Methode wurde auch bei MY-Lösungen angewandt (Horsmann und Merzkirch, 1981). In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich jedoch auf die Betrachtung zweidimensionaler Strömungsdoppelbrechung beschränken.

3. Die wässrige Farbstofflösung Milling Yellow, Eigenschaften, Einflußfaktoren

Bei MY- Farbstoff handelt es sich um ein kommerzielles Farbpulver. Es wurde bis vor wenigen Jahren von den Farbwerken Hoechst (Frankfurt) hergestellt unter der Markenbezeichnung

Alphanolechtgelb H5G .

Lt. Herstellerangaben besteht es aus
67% reinem Farbstoff und
33% NaCl.

Aus amerikanischer Herstellung ist ein ähnliches Produkt bekannt unter der Bezeichnung

NGS 1828

Für diesen Stoff sind Untersuchungen von Pindera und Krishnamurthy (1978), Swanson und Green (1969) durchgeführt worden, wobei im Farbpulver im Unterschied zu Alphanolechtgelb H5G zusätzlich ein geringer Anteil Na_2SO_4 enthalten ist. Bei Swanson findet man folgende Angaben:

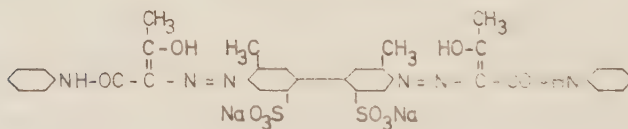
65 - 70% reiner Farbstoff

30 - 35% NaCl mit einem (nicht genau angegebenen)

Anteil Na_2SO_4 .

Molekulare Struktur des reinen Farbstoffs (Swanson und Green, 1969):

MILLING YELLOW NGS.



6,6'- Disulfo-o-tolidine $\rightleftharpoons$ Acetoacetanilide [2 MOL]

Bild 7: Molekularstruktur des MY-Farbstoffs

Die äußere Form der Partikel zeigt längliche, stäbchenförmige Gestalt. Der Farbstoff läßt sich bis ca 2% in destilliertem Wasser lösen, was ausführlich bei Swanson beschrieben wurde. Zur Lösung in Wasser benötigt man dabei die Zufuhr thermischer Energie (Erhitzen, Ultraschall). Will man bei Raumtemperatur eine stabile Lösung erhalten, müssen entsprechende Anteile NaCl bzw. Na_2SO_4 hinzugegeben werden. Außerdem sollte man das System in geschlossenen Behältern halten, da Luftkontakt zum Ausfall führen kann.

Für die am Inst. für Thermo- und Fluidodynamik durchgeführten Versuche mit H5G wurde überwiegend nur mit NaCl- Zusatz gearbeitet. Die doppelbrechenden Eigenschaften ergeben sich bei bestimmten Anteilen von Farbstoff, Salz und destilliertem Wasser. Versuche ergaben, daß eine stabile doppelbrechende Lösung noch bei 0.08% (Volumen) reinem Farbstoff erhalten werden kann. Sollte die Lösung jedoch einmal ausfallen, kann man sie durch Ultraschallanwendung bzw. Erhitzen wieder in den gewünschten Zustand bringen.

Die Viskosität der Lösung steigt bei zunehmender Konzentration sehr stark an mit einer deutlichen Ausprägung des Nicht-Newtonschen Fließverhaltens (Peebles und Liu, 1965). Es zeigt sich, daß die Viskosität und auch die optische Empfindlichkeit außerdem sehr stark von der Temperatur abhängig ist. Ursache ist dabei der Anstieg der Molekularbewegung (Brownsche Bewegung), die zur Desorientierung der Molekülstrukturen führt. So ist etwa oberhalb von 35°C schon keine optische Aktivität mehr festzustellen. Beim Anstieg der Temperatur bis zum Siedepunkt nähert sich die Viskosität einem Wert, der von Einstein für Kugelsuspensionen angegeben wurde. Die optische Empfindlichkeit und das Nicht- Newtonsche Viskositätsverhalten sind somit durch Konzentration und Temperatur in einem weiten Bereich einstellbar. Typische Fließkurven sind in Kap. 5 dargestellt.

Die optische Empfindlichkeit ist wellenlängenabhängig (Pindera und Krishnamurthy, 1978). Bild 8 zeigt die Doppelbrechung und Bild 9 die Durchlässigkeit einer MY-Lösung von 1.63 % Volumen über einem weiten Spektralbereich.

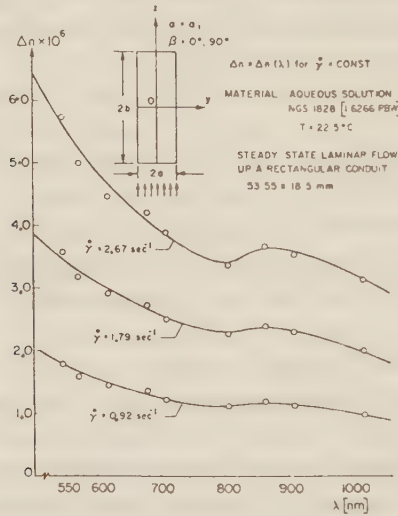


Bild 8: Spektrale Abhängigkeit der Doppelbrechung einer MY-Lösung (NGS 1828)

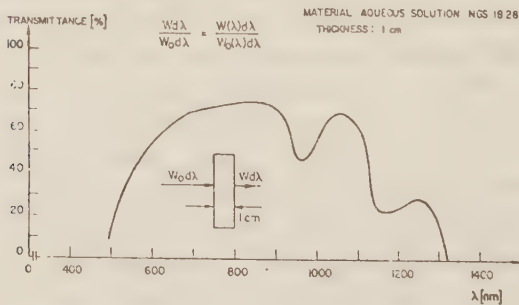


Bild 9: Spektrale Abhängigkeit der Transparenz einer wässrigen MY-Lösung (NGS 1828) von 1.63 % (Volumen)

Es zeigt sich ein Anstieg der Empfindlichkeit bei kleiner werdenden Wellenlängen (bis 500nm). Andererseits erfolgt dabei eine Zunahme der Absorption (Bild 9). Für die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Experimente wurde eine konstante Wellenlänge von 514.5 nm (grünes Licht) benutzt, so daß hierbei Änderungen der Empfindlichkeit auf Grund des Spektralverhaltens praktisch vernachlässigbar sind.

Um doppelbrechende Lösungen experimentell untersuchen zu können, soll nun zunächst die Theorie der Doppelbrechung beim Vorhandensein von starren Partikeln dargelegt werden.

4. Theorie der Strömungsdoppelbrechung

Die Betrachtung soll beschränkt werden auf den Fall der kolloidalen Strömungsdoppelbrechung. Entsprechend der Voraussetzung, daß eine Verformung der Teilchen von untergeordneter Bedeutung ist, spielt der Orientierungseffekt für die Doppelbrechung die entscheidende Rolle. Die optischen Eigenschaften des Fluides sind eine Folge der Verteilung der Teilchenachsen. Dabei nimmt man an, daß die Teilchen selbst eine konstante optische Anisotropie besitzen. Die Verteilung der Teilchenachsen folgt aus dem Geschwindigkeitsgradientenfeld des Fluids. Um die Theorie der optischen Aktivität darzulegen, wird die Betrachtung unterteilt in:

- a) Hydrodynamisches Verteilungsproblem der Teilchenachsen
- b) Das bei bekannter Teilchenbewegung auftretende optische Verhalten

Bei der Strömung eines Zweiphasensystems hat man zu berücksichtigen, daß auf Grund von Form- und Größenunterschieden von Teilchen in einer Suspension sich makroskopisch ein stark unterschiedliches Verhalten ergeben kann. So zeigen Kugelsuspensionen im allgemeinen Newtonsches Strömungsverhalten (Einstein, 1906), hingegen Suspensionen von Rotationsellipsoiden bei der theoretischen Berechnung strukturviskoses (Nicht-Newtonsches) Verhalten (Peterlin, 1938; Burgers, 1938). Bezüglich der Absolutgröße der Teilchen spielt bei kleiner werdenden Teilchen die Brownsche Molekulardiffusion zunehmend eine entscheidende Rolle, während bei größeren Teilchen dieser Einfluß verschwindet (Eisenschitz, 1931; Kuhn, 1932). Es ist deshalb erforderlich, im Experiment die zur theoretischen Beschreibung gemachten Voraussetzungen zu überprüfen und näherungsweise einzuhalten.

Als Voraussetzung der theoretischen Behandlung wird gleiche Größe und Form der Teilchen angenommen, ferner geringe Konzentration und daraus folgend keine gegenseitige Beeinflussung zweier benachbarter Teilchen. Weiterhin werden Trägheitskräfte vernachlässigt.

4.1 Teilchenform

Die angenommene Teilchenform beeinflusst einmal die Art der Teilchenbewegung, darüber hinaus wird für die Durchstrahlung der optische Weg festgelegt (siehe Abschnitt 2.1). In der Literatur werden zwei Modelle diskutiert. Das eine legt eine Ellipsoidform zugrunde. Damit bietet sich der Vorteil, die Bewegungsgleichungen der Teilchenrotation analytisch zu formulieren (Jeffery, 1922; Haller, 1932). Das zweite Modell vernachlässigt die Teilchenform ganz und reduziert sie auf eine gedachte Linie (Boeder, 1932). Diese einschränkende Betrachtung gründet darauf, daß in den kolloidalen Lösungen oft "schlanke" Teilchen vorhanden sind, die ein großes Achsenverhältnis haben und damit den Grenzübergang rechtfertigen. Das real vorhandene längliche Teilchen mit Rechteckquerschnitt wird am ehesten vom Ellipsoid repräsentiert. Von den unterschiedlichen äußeren Formen ist jedoch das Indexellipsoid nicht betroffen (siehe Abschnitt 2.1), es ist bedingt durch die Kristallgitterstruktur.

Für eine Ellipsoid- oder eine Zylinderform der Teilchen ist die Lichtausbreitung im Fluid mit Sicherheit nicht geradlinig in Bezug auf einen senkrecht ins Fluid eintretenden Lichtstrahl. An dieser Stelle soll aber nicht näher auf diese Problematik eingegangen werden. Beim Auswerteverfahren soll die tatsächliche optische Wegdifferenz, die gegenüber einem Referenzzustand auftritt, ersetzt werden durch die Modellvorstellung, daß ein Medium existiere, in dem das doppelbrechende Material geradlinig durchlaufen wird. Diese Vorstellung schließt an die Betrachtung von Boeder an. Bei geradliniger Durchstrahlung kann man die Wirkung der MY- Lösung separieren in zwei getrennte Anteile, die Wirkung des reinen Farbstoffs und die des Lösungsmittels.

4.2 Teilchenrotation, Hydrodynamisches Modell

Für das Zustandekommen der optischen Anisotropie ist allein die Beeinflussung der Teilchenrotation durch Diffusion und Strömungsorientierung verantwortlich. Translationsbewegungen des Fluids führen zu keiner Änderung der Richtungsverteilung der in ihr enthaltenen Partikel. Für die Teilchenbewegung gilt die Haftbedingung der Suspensionsflüssigkeit an der Teilchenoberfläche. Es wird zunächst ein Kontrollgebiet innerhalb der Suspension herausgegriffen, in dem sich ein Teilchen befindet. Das Gebiet soll so groß gewählt werden, daß das Vorhandensein des Teilchens die Geschwindigkeit der Strömung auf dem Rand des Kontrollgebietes nur sehr wenig verändert gegenüber dem Fall, daß das Teilchen gar nicht vorhanden wäre. Das heißt, es wird durch das Teilchen nur die Strömung in der näheren Umgebung modifiziert, in weiterer Entfernung ist der Einfluß auf die Strömung jedoch verschwindend gering.

4.2.1 Waylandsche Theorie der Strömungsdoppelbrechung

Die Theorie gründet sich auf die Betrachtungen von Peterlin und Stuart (1935), wobei die Bewegungsgleichungen von Jeffery (1922) zugrunde gelegt wurden. Jeffery formulierte die Rotationsbewegung von ellipsoidförmigen Partikeln in einem homogenen Medium bei Vorhandensein eines konstanten Schergradienten. Außerdem stellte er Betrachtungen zur Energiedissipation an. Peterlin und Stuart untersuchten das rheologische und optische Verhalten einer entsprechenden Ellipsoidsuspension. Wayland (1963a) erweiterte die Betrachtung auf den allgemeinen Fall der zweidimensionalen Scherung. Für die im Durchlichtverfahren meßbaren Isochromaten und Isoklinen gab er folgenden Zusammenhang an:

$$\bar{\psi} = \psi_e + a' \frac{\epsilon_{\max}}{D_R} + b' (\sin^2 \psi_e + c') \left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)^5 \right]$$

$\bar{\psi}$ bezeichnet den Winkel zwischen der optischen Achse des Mediums und der Stromlinie.

Betrag der Doppelbrechung:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = a \frac{\epsilon_{\max}}{D_R} + b (\sin^2 2\psi_e + c) \left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)^3 + O \left[\left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)^5 \right]$$

Hierin sind a, a', b, b', c, c' strömungsunabhängige Konstanten, D ist die Rotationsdiffusionskonstante. $\epsilon_{\max}$ ist die maximale Scherrate bzw. Deformationsgeschwindigkeit u. folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{\max} = \left[(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + 4 \epsilon_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

Wobei gilt: $\epsilon_{xx} = (\partial u / \partial x)$; $\epsilon_{yy} = (\partial v / \partial y)$;

$$\epsilon_{xy} = (1/2) (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$$

mit u, v = Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

In der Gl. ist ψ_e der Winkel zwischen der Stromlinie und der Richtung der maximalen Deformationsgeschwindigkeit. Diese Beziehungen sind Reihenentwicklungen von $\epsilon_{\max}$ bzw. ψ_e . Für die praktische Anwendung wurde bisher nur der lineare Term der Entwicklung

$$\psi = \psi_e + a' \left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)$$

benutzt, in diesem Fall verschwindet für Δn die Abhängigkeit vom Winkel ψ_e . Man erhält:

$$\Delta n = a \left(\frac{\epsilon_{\max}}{D_R} \right)$$

Durch Messung von $n_1 - n_2$ (Isochromaten) mit dem Polariskop und Bestimmung der Konstanten durch eine Eichung kann man für den Fall der schleichenden Strömung die Geschwindigkeitsverteilungen berechnen. Bisher sind jedoch nur wenige quantitative Auswertungen durchgeführt worden (Peebles und Liu, 1965; Merzky, 1978; McAfee, Pih, 1974).

4.2.2 Theorie von Boeder

Betrachtet wird ein im ganzen Feld konstanter Schergradient. Läßt man im Kontrollvolumen den gedachten Durchmesser des Einzelteilchens bei gleichbleibender Teilchenlänge immer kleiner werden, derart, daß schließlich die Volumenausdehnung ganz vernachlässigt werden kann, so wird schließlich das Teilchen nur noch durch eine gedachte Linie repräsentiert. Diese Linie wird als Diagonale in einem gescherten Fluidelement angesetzt. Durch den Grenzübergang $V \rightarrow 0$ hat man nun auch keine Haftbedingung mehr. Die Scherbewegung des Fluidelementes bewirkt eine Ortsänderung der Diagonalen, die das Teilchen repräsentiert. Die real ablaufende räumliche Scherung soll zunächst nicht betrachtet werden. Es wird der einfachere Fall der ebenen Scherung behandelt, das heißt, man nimmt an, daß das Teilchen in einer dünnen Schicht rotiert, deren Mit-

telebene senkrecht zur Lichtdurchstrahlrichtung verläuft. Diese Ebene ist die Scherebene. In realen Strömungen wird diese Rotation nur einen Teil der auftretenden Teilchenrotation ausmachen. Gerechtfertigt ist diese Betrachtung jedoch dadurch, daß in der zur Lichtrichtung senkrechten Ebene der größere Anteil der Separation infolge Doppelbrechung auftritt. Für den Fall einer Couette-Strömung gelten für die Achsenrotation der Diagonalen (siehe Bild 10):

$$\beta_1 = \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \omega_{\beta_1} = - \frac{\frac{\overline{BD}}{\Delta t}}{\overline{OB}}$$

($\beta_1 \hat{=}$ Geschwindigkeitsgradient) ($\omega_{\beta_1} \hat{=}$ Winkelgeschwindigkeit)

$$\sin \phi \approx \frac{\overline{BD}}{\overline{BB'}} \quad \frac{\overline{BB'}}{\Delta t} = \beta_1 y_1 \quad y_1 = \overline{OB} \sin \phi$$

Somit erhält man für die Rotation der Diagonalen:

$$\omega_{\beta_1} = - \beta_1 \sin^2 \phi$$

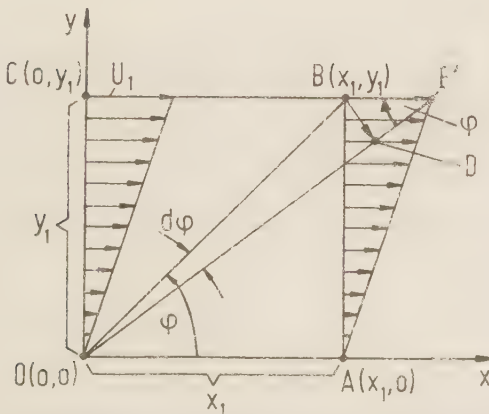


Bild 10: Diagonaldrehung eines Fluidelementes

4.3 Diffusionsgleichung der Teilchenrichtungsichte für das ebene Problem

Da der Anisotropieeffekt der MY- Lösung als integraler Effekt in Erscheinung tritt, wird nun über der Durchstrahlrichtung ein größeres Volumen mit einer Anzahl N_T von Teilchen betrachtet, wobei N_T sehr groß sein soll.

Entsprechend den vorausgegangenen Betrachtungen soll im folgenden das ebene Problem behandelt werden. Die real ablaufende Diffusion und Rotation hat natürlich räumlichen Charakter. Die entsprechenden Ausführungen dazu sind bei Peterlin und Stuart (1932) bzw. bei Snellman und Björnstal (1941) zu finden.

Zunächst wird für ein Teilchen die Lage seiner Längsachse in Bezug gesetzt zu einer festen Raumrichtung, der x - Koordinate (z. B. der Hauptströmungsrichtung), ausgedrückt durch den Winkel ϕ . Für den Fall, daß bei einer Anzahl von Teilchen alle eine unterschiedliche Winkellage gegenüber der x - Achse hätten, könnte man den ganzen Winkelkreis mit Teilchenrichtungen belegen. Beginnt man dann von $\phi = 0$ an zu nummerieren, so kann man die Teilchenzahl N_T über ϕ auftragen, wobei noch vorausgesetzt werden soll, daß die einzelnen Winkellagen mit gleicher Häufigkeit auftreten.

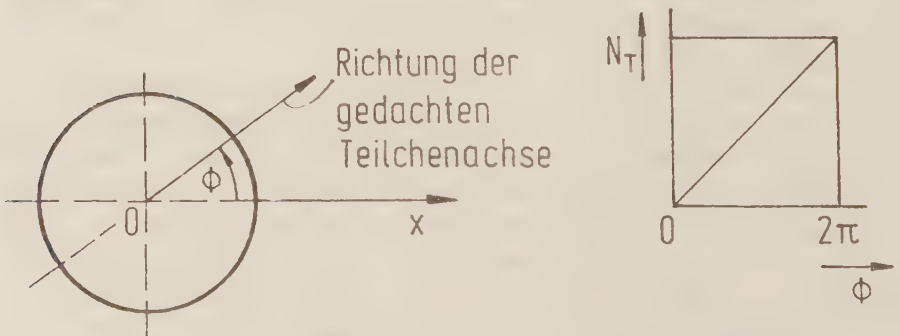


Bild 11: Richtungswinkel und Anzahl der Teilchenachsen

Dies würde einer gleichmäßigen Richtungsverteilung von MY-Kristallachsen im Ruhezustand entsprechen.

Mit $\rho = (\Delta N_T / \Delta \phi)$ soll nun die Dichte der Teilchenrichtung abhängig vom Winkel bezeichnet werden. Für eine gleichmäßige Richtungsverteilung ergäbe sich $\rho = \text{konst.}$ und $d\rho/d\phi = 0$. Die Richtungsichte wird durch den Einfluß einer Scherströmung in bestimmter Weise verändert, derart, daß sich ein ungleichmäßiger Verlauf ausbildet, der gekennzeichnet ist durch einen Gradienten $d\rho/d\phi \neq 0$. Physikalisch ist dieser Zustand die Ursache für einen Diffusionsprozeß, der eine Gleichverteilung anstrebt. Die Diffusion dämpft die Ausprägung einer Ungleichverteilung, sie hat also gegenüber dem Strömungseinfluß entgegengesetztes Vorzeichen. Die Einflußgrößen lassen sich in Form einer Differentialgleichung formulieren. Infolge der Strömung bewegen sich in das Intervall $d\phi$ des Dichtekreises in der Zeitspanne dt $(\rho \omega) \Big|_{\phi}$ Teilchen hinein. Bei $\phi + d\phi$ strömen dagegen $(\rho \omega) \Big|_{\phi+d\phi}$ Teilchen aus. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ergibt die Änderung von ρ in der Zeiteinheit für das Intervall $d\phi$ und somit :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{Str.}} = - \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial \phi} \quad (4.3.1)$$

Die Anzahl der Teilchenrichtungen, die als Folge der Diffusion (Rotation) über die Grenze des Winkelintervalls strömen, ist proportional zum Gradienten $d\rho/d\phi$, Proportionalitätsfaktor ist die Diffusionskonstante D . Die Diffusion strebt den Zustand gleichmäßiger Verteilung der Richtungen an. An der Stelle ϕ strömen somit durch Diffusion in der Zeiteinheit

$$\left(D \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta N_m}{d\phi} \right) \Big|_{\phi} \quad (4.3.2)$$

Teilchen ein. An der Stelle $\phi+d\phi$ strömt die Anzahl

$$\left(D \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi+d\phi} = D \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} d\phi \quad (4.3.3)$$

aus. Die Differenz der letzten beiden Gleichungen ist gleich der zeitlichen Änderung:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{Br.D.}} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} \quad (4.3.4)$$

Zusammengefaßt lautet die Differentialgleichung für die Richtungsverteilung (ebenes Problem):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{Str.}} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{Br.D.}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} - \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial \phi} \quad (4.3.5)$$

Für stationären Zustand wird daraus :

$$D \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} - \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \omega - \rho \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = 0 \quad (4.3.6)$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich nicht geschlossen darstellen, sie muß jedoch von der Periode π sein, da eine Richtungsänderung eines Teilchens um π keinen Einfluß auf die Richtungsichte haben kann. Die periodische Lösung, die mit Hilfe dieser Bedingung bei Vorhandensein des Geschwindigkeitsgradienten du/dy (Bild 12) entwickelt wurde, lautet (s. Anhang):

$$\rho(\varphi) = \frac{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\phi_1 - \frac{\alpha}{4}\sin 2\phi_1\right]}{\exp\left[\frac{\alpha}{2}\phi - \frac{\alpha}{4}\sin(2\phi)\right]} \cdot \{ 1 +$$

$$\left[\exp\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \right] \cdot \frac{\int_{\phi_1}^{\phi} \exp\left[\frac{\alpha}{2}\phi - \frac{\alpha}{4}\sin(2\phi)\right] d\phi}{\int_{\phi_1}^{\phi_1+\pi} \exp\left[\frac{\alpha}{2}\phi - \frac{\alpha}{4}\sin 2\phi\right] d\phi} \}$$

(ϕ_1 so bestimmt, daß $(1/2\pi) \int_0^{\pi} \rho(\phi) d\phi = 1$ ist)

($\alpha = \beta_1/D$)

(4.3.7)

wobei $\alpha = (du/dy)/D$ die Abhängigkeit vom Gradienten kennzeichnet. Mit ϕ_1 ist die Stelle bezeichnet, bei der die Teilchenrichtungsichten den Wert $\rho = 1$ erreicht. Den Verlauf von ρ für zwei Werte von α zeigt Bild 11. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen dabei die Ergebnisse der numerischen Berechnung von Gl. (4.3.7). Zum Vergleich sind die Ergebnisse von Boeder aufgeführt (gestrichelte Linien). Bis auf geringe (wohl numerische) Unterschiede zeigt sich ein identischer Verlauf der Teilchenrichtungsichten.

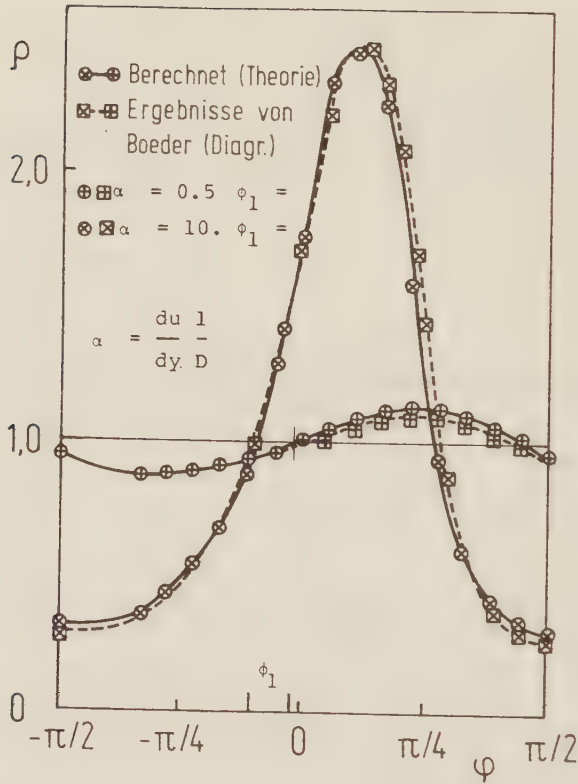


Bild 12: Richtungsdichte der Teilchenachsen beim Gradienten α

4.4 Polarisierungstheoretische Behandlung der Richtungsverteilung

Es wird die Abhängigkeit der Brechungsindices von der Verteilung der Teilchenrichtungen bestimmt. Das vereinfachte ebene Strömungsproblem ist für die optische Betrachtung notwendigerweise ein räumliches Problem. Um hierbei Übereinstimmung zu schaffen, wird folgende Annahme getroffen: Die Teilchenrichtungsichte ist über dem zweiten Raumwinkel θ , der in der Ebene senkrecht zur Zeichenebene liegt, konstant. Bei der polarisationstheoretischen Behandlung geht man zunächst von den folgenden Größen aus:

Die Lichteinstrahlung verursacht ein elektrisches Störfeld von der Feldstärke E .

Durch das Vorhandensein des Teilchens ergibt sich eine "innere", am Ort des Teilchens wirkende Feldstärke E' .

Grob gekennzeichnet betrachtet man:

1. Die Teilchenpolarisation beim auftretenden elektrischen Feld. Es ergibt sich die Tensorbeziehung $\vec{p} = \vec{C} E'$, wobei $\vec{C}$ der Polarisierbarkeitstensor ist und $\vec{p}$ die Teilchenpolarisation.
2. Die Volumenpolarisation in der Form der Tensorbeziehung $\vec{P} = \vec{\gamma} E'$, wobei $\vec{\gamma}$ der Tensor ist, der resultiert, wenn die Summe über die Werte C aller der in dem Bereich enthaltenen Teilchen gebildet wird.
3. Die Dielektrizitätsgröße $\vec{\epsilon}$, die den Brechungsindex darstellt, entwickelt aus den Tensorbeziehungen

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\epsilon} \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (4.4.1)$$

$$(4.4.2)$$

Man erhält dann mit $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(\gamma)$ die skalaren Beziehungen $n_i^2 = \epsilon_i$; ($i=1,2,3$).

Die ausführliche Herleitung ist im Anhang dargelegt. Das Er-

gebnis der Theorie liefert nun eine Beziehung für die Brechungsindices n_1 und n_2 . Die Indices 1 und 2 kennzeichnen die Vorzugsrichtungen der optischen Anisotropie. Die beiden außerordentlichen Strahlen können als linear schwingende Lichtwellen betrachtet werden, die in den Winkelrichtungen 1 und 2 schwingen.

Es ist

$$n_1 = (a + b \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.3)$$

$$n_2 = (a - b \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.4)$$

$$n_3 = (a)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.5)$$

Hierbei sind a und b Konstanten, die die Polarisierbarkeiten des Teilchenmaterials enthalten.

$$a = 1 - \frac{4 \pi k_1}{\frac{4 \pi}{3} k_1 - 1} \quad (4.4.6)$$

$$b = \frac{4 \pi k_2}{\left(\frac{4 \pi}{3} k_1 - 1\right)^2} \quad (4.4.7)$$

$$k_1 = \frac{4 \pi}{3} (2c_1 + c_2) \quad (4.4.8)$$

$$k_2 = \frac{2}{3} (c_1 - c_2) \quad (4.4.9)$$

$$\theta = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.10)$$

$$A = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi \quad (4.4.11)$$

$$B = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \sin^2 \phi \, d\phi \quad (4.4.12)$$

$\rho = f(\text{Geschwindigkeitsgradienten}, \dots)$

c_1, c_2 Polarisierbarkeiten des Kristalls

Die dimensionslose Funktion θ kennzeichnet den Zusammenhang zwischen hydrodynamischen und optischen Verhalten. Für die experimentelle Bestimmung doppelbrechender Strömungen hat sie eine zentrale Bedeutung. Ist ihr Verlauf einmal bestimmt worden, so ist die optische experimentelle Auswertung entsprechender Strömungen relativ einfach durchführbar (siehe Kap.5.). Um eine einfache Handhabung zu erreichen, wurden die zunächst numerisch berechneten Funktionswerte θ durch analytische Funktionen approximiert. Bild 14 zeigt den Verlauf von θ in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsgradienten du/dy .

Zur Polarisationsrichtung der beiden doppelbrechenden Strahlen läßt sich der Auslöschwinkel ψ betrachten. Aus der Theorie ergibt sich:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{B}{A} \right) \quad (4.4.13a)$$

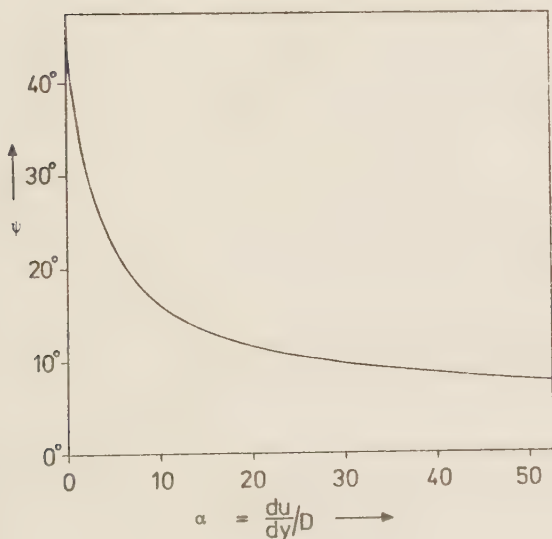


Bild 13: Auslöschwinkel (Theorie) beim Gradienten α

ψ wird für kleine Werte der Scherrate (du/dy) gleich 45° und

hat damit den gleichen Betrag wie die Hauptspannungsrichtungen eines strömenden Fluides. Bei zunehmender Scherrate weicht ψ jedoch immer stärker vom Hauptspannungswinkel ψ_e ab und nähert sich asymptotisch dem Winkel 0.

Entsprechend zeigt die Funktion θ asymptotisches Verhalten für große Scherraten. Sie nähert sich dann dem Maximalwert 2π .

Die Ableitung von θ bezogen auf den Geschwindigkeitsgradienten kennzeichnet die optische Empfindlichkeit. Diese ist maximal bei niedrigen Werten von α und geht bei sehr großen Werten von α asymptotisch gegen Null.

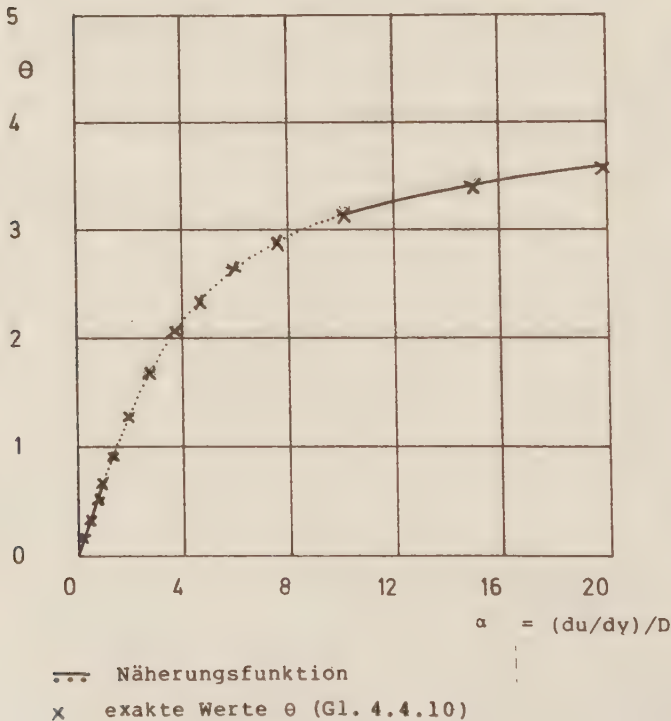


Bild 14: Strömungsoptische Funktion θ

Näherungsfunktion:

Bereich: $0 < \alpha < 1$

$$\theta = \alpha \frac{\pi}{4} \left[1 - \alpha \frac{1}{10} \right] \quad (4.4.13b)$$

$1 < \alpha < 10$

$$\theta = k_1 \arctg (k_2 \alpha) \quad (4.4.14)$$

$$k_1 = 2.45$$

$$k_2 = 0.32$$

$10 < \alpha$

$$\theta = k_3 \arctg (k_4 \alpha^{k_5}) \quad (4.4.15)$$

$$k_3 = 4.$$

$$k_4 = 0.1$$

$$k_5 = 0.34819$$

4.5 Erweitertes Modell der Diagonalendrehung eines Fluidteilchens im allgemeinen 2D- Scherfeld

Die in den vorangegangenen Kapiteln dargelegte Theorie von Boeder bezieht sich auf den Fall eines einzelnen Geschwindigkeitsgradienten du/dy , wie man es in sog. Schichtenströmungen vorfindet. Bisher gab es jedoch keine theoretische Weiterentwicklung für den Fall einer allgemeinen 2D- Strömung, bei der mehrere Geschwindigkeitsgradienten wirksam sind.

Ziel dieser Arbeit soll nun sein, die Theorie der optischen Anisotropie bei mehreren gleichzeitig wirkenden Schergradienten, wie sie in real ablaufenden Strömungen vorkommen, zu entwickeln und die Ergebnisse an Hand einfacher Modellfälle im Experiment zu überprüfen.

Dazu wird zunächst wieder der hydrodynamische Einfluß auf das Rotationsverhalten untersucht.

Die ebene Formänderung eines differentiell kleinen Fluidteilchens in ebener Strömung wird ausgedrückt durch den Geschwindigkeitsgradiententensor

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (4.5.1)$$

Dabei kann der Geschwindigkeitsgradiententensor aufgeteilt werden in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Teil (Darby, 1976), so daß gilt:

$$D : \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^T \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (4.5.2)$$

$$W : \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^T \right] = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = D + W \quad (4.5.4)$$

Für den Fall einer reinen Dehnströmung ($\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} = 0$) erhält man:

$$D : = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (4.5.5)$$

Wegen der Symmetrie von D folgt in diesem Fall, daß der Drehungstensor W Null sein muß. Das bedeutet, daß ein Fluidelement in einer Dehnströmung seine Form zwar verändern kann, die Winkellagen seiner Seitenkanten aber gegenüber einem äußeren Bezugssystem unverändert bleiben.

Betrachtet man dagegen die Drehung der Diagonalenachse, die durch den Nullpunkt verläuft, so verursacht im Gegensatz dazu auch der Deformationsterm eine Drehung, die mit ω Index du/dx bzw. dv/dy gekennzeichnet sein soll. Man erhält:

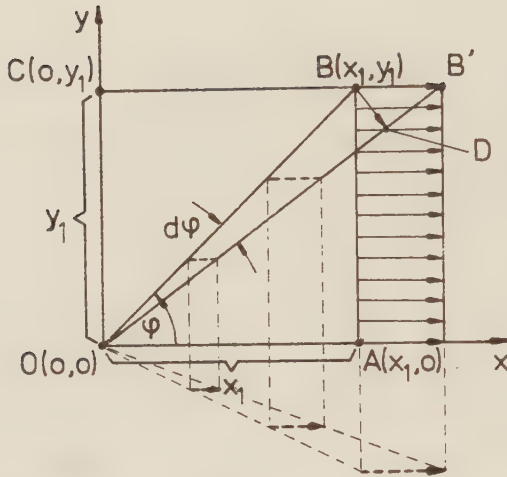


Bild 15: Diagonalendrehung eines Fluidelementes
in ebener Dehnströmung

$$\beta_3 = \frac{du}{dx} \quad \omega = - \frac{\frac{\overline{BD}}{\Delta t}}{\overline{OB}} \quad \sin \phi \approx \frac{\overline{BD}}{\overline{BB'}}$$

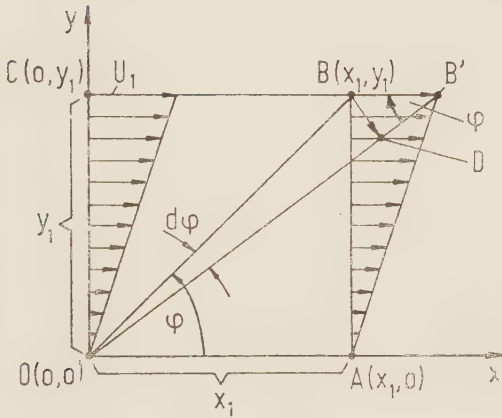
$$\frac{\overline{BB'}}{\Delta t} = \beta_3 \times l \quad x_1 = \overline{OB} \cos \phi$$

Damit erhält man als Drehgeschwindigkeit der Diagonalen in einer ebenen Dehnströmung mit (du/dx) :

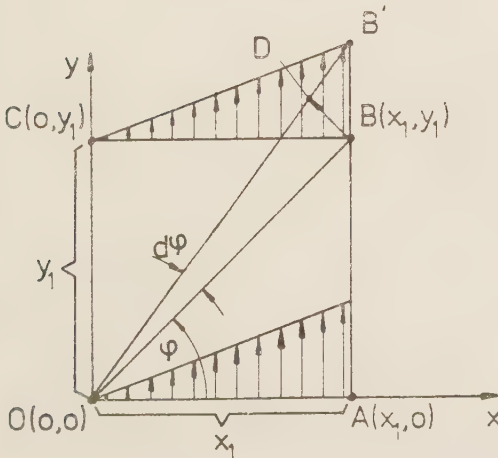
$$\omega \frac{du}{dx} = - \sin \phi \cos \phi \beta_3 = - \frac{\beta_3}{2} \sin (2 \phi) \quad (4.5.6)$$

Die Gesamtdrehung der Diagonalen im allgemeinen 2D-Scherfeld läßt sich aus den Drehbewegungen, verursacht durch die einzelnen Scherkomponenten bestimmen (Überlagerungsprinzip), wobei die Geschwindigkeiten vektoriell addiert werden. Die einzelnen Anteile sind:

$$\frac{\omega_{du}}{dx} = - \sin (2 \varphi) \frac{\beta_3}{2} \quad (4.5.7)$$



$$\frac{\omega_{du}}{dy} = - \sin^2 \varphi \beta_1 \quad (4.5.8)$$



$$\frac{\omega_{dv}}{dx} = \cos^2 \varphi \beta_2 \quad (4.5.9)$$

(Drehrichtung entgegengesetzt zu $\frac{\omega_{du}}{dy}$)

Bild 16: Diagonalendrehung eines Fluidelementes in ebener Scherströmung

Auf Grund der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad + \quad \frac{dv}{dy} = - \frac{du}{dx} \quad (4.5.10)$$

D.h. die beiden Deformationsgradienten sind abhängig voneinander und bedingen beide dieselbe Drehbewegung. Das negative Vorzeichen in Gl. (4.5.10) weist der Komponente dv eine Richtung zu, die entgegengesetzt zur Koordinate y verläuft (Bild 15), während du in positiver x - Richtung liegt.

$$\omega \frac{du}{dx} = \omega \frac{dv}{dy}$$

Somit ergibt sich als Diagonalenrotation im 2D- Scherfeld:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Ges.}} &= \omega \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy} = -(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \phi + \beta_2 - \frac{\beta_{34}}{2} \sin(2\phi) \\ \beta_1 &= \frac{du}{dy} \quad \beta_2 = \frac{dv}{dx} \quad \beta_{34} = \frac{du}{dx} \cdot 2 \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man als Lösung der Dg₁ (4.3.7)

$$\rho(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left[\frac{\exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \phi_1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} \sin 2\phi_1 - \frac{\alpha_3}{2} \cos(2\phi_1)\right]}{\exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \phi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} \sin(2\phi) - \frac{\alpha_3}{2} \cos(2\phi)\right]} \right] \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \pi\right) - 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\int_{\phi_1}^{\phi} \exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \phi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} \sin(2\phi) - \frac{\alpha_3}{2} \cos(2\phi)\right] d\phi}{\int_{\phi_1}^{\phi_1 + \pi} \exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \phi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} \sin(2\phi) - \frac{\alpha_3}{2} \cos(2\phi)\right] d\phi} \right] \}$$

$$\text{Mit } \alpha_1 = \frac{du}{dv} \quad \alpha_2 = \frac{dv}{dx} \quad \alpha_3 = \frac{du}{dx}$$

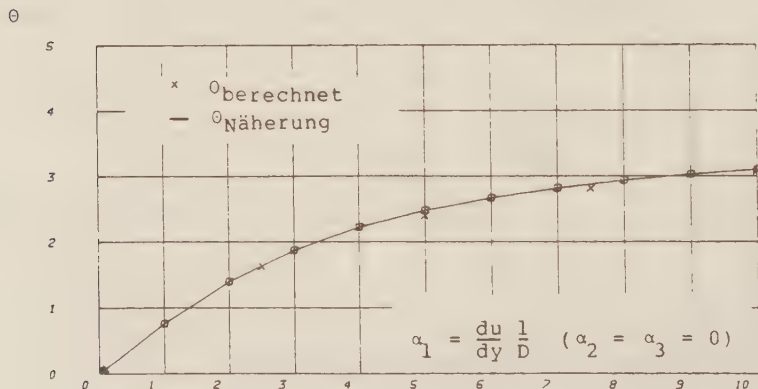
(4.5.12)

Zur Herleitung siehe die Ausführungen im Anhang.

Bei der polarisationstheoretischen Betrachtung der Brechungsindices gelten die Beziehungen der Gl. (4.4.3; 4.4.4) unverändert. Jedoch ergibt sich für die strömungsoptische Funktion θ eine Erweiterung zu einer mehrdimensionalen Funktion. Im folgenden werden Ergebnisse der numerischen Berechnung für die

Abhängigkeit von mehreren Geschwindigkeitsgradienten vorgestellt.

Zunächst wurde der Verlauf von θ für die einzelnen unterschiedlichen Gradienten berechnet. Bild 17 und Bild 18 zeigen θ als Funktion des ebenen Schergradienten du/dy und des Elongationsgradienten du/dx . Es zeigt sich, daß θ in Abhängigkeit von du/dx einen größeren Anstieg hat als beim Gradienten du/dy . Bei gleichen Beträgen von du/dx und du/dy wird also im Falle der verzögerten bzw. beschleunigten Strömung ein größerer θ -Wert und damit auch ein stärker ausgeprägter Brechungsindex zu erwarten sein als bei der Scherung in einer Schichtenströmung. Es sei angemerkt, daß Wayland (1963) über einen Vergleich von Schichten- und Dehnströmung berichtet hat, als dessen Resultat bei divergenter Strömung eine höhere Isochromatenanzahl vorausgesagt wurde als bei entsprechendem Scherbetrag in der Schichtenströmung. Die Anwendung der hier vorgestellten theoretischen Ergebnisse soll jedoch erst in den folgenden Kapiteln besprochen werden.



$$\theta_{\text{Näh.}} = 2.45 \arctg \left[(1.57 / 4.9) \alpha_1 \right]$$

Bild 17: Strömungsoptische Funktion in Abhängigkeit vom Schergradienten $\alpha_1 = \frac{du}{dy} \frac{1}{D}$ ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$)

0

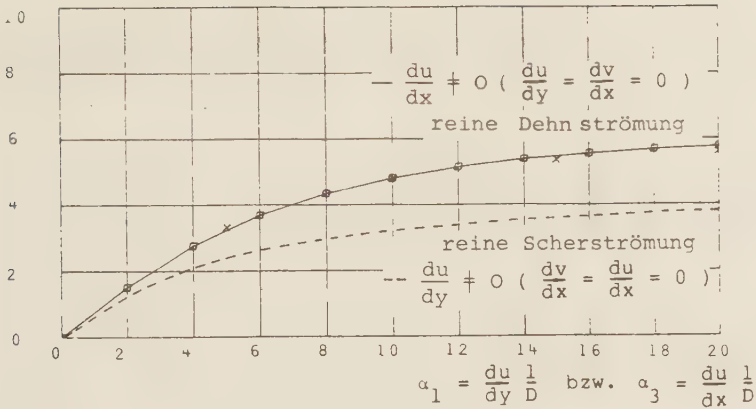


Bild 18: Strömungsoptische Funktion Θ bei reiner Dehn- bzw. reiner Scherströmung (s.o.!).

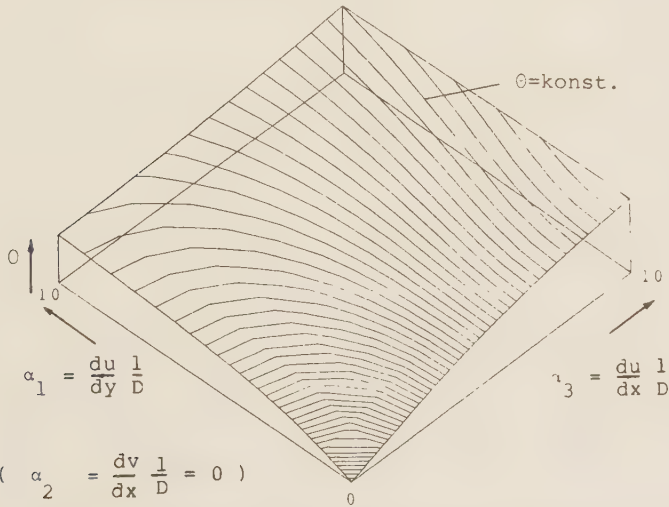


Bild 19: Dreidimensionale Darstellung der strömungsoptischen Funktion für α_1, α_3 ($\alpha_2 = 0$).

Entsprechend Gl. (4.5.12) wird die Funktion Θ in Abhängigkeit von den drei Größen

$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 \text{ festgelegt.}$$

Für den Sonderfall $\alpha_2 = 0$ zeigt Bild 19 eine dreidimensionale Darstellung der Funktion Θ . Auf die Bedeutung dieses Sonderfalls wird in Kap. 6.2 hingewiesen.

Eine analytische Näherungsfunktion für diesen Sonderfall lautet:

$$(x^* = \alpha_3, \quad y^* = \alpha_1)$$

$$\theta_{\text{Näh.}} = k_2 \left[\frac{\frac{1}{2} y^{*2} + \frac{1}{2} x^{*2}}{y^* + \frac{1}{2} x^*} \right]$$

$$\arctg \left[\frac{k_1}{k_2} \left[\frac{x^{*2}}{4} \left[1 - \left(\frac{x^*}{k_3} \right)^2 \right] + y^{*2} \right]^{0.5} \right]$$

$$k_2 = 4.9$$

$$k_1 = 1.57$$

$$k_3 = 20.$$

(4.5.13)

Bezüglich der Genauigkeit ergab sich im Bereich $0 < x^* < 10$ und $0 < y^* < 10$ ein mittlerer Fehler von 3.39% (s.Kap.7.2!) ■. Mit diesen Betrachtungen soll der theoretische Teil abgeschlossen werden. Die o.a. Beziehungen beschreiben den theoretischen Zusammenhang zwischen optischer Doppelbrechung und dem allgemeinen 2D- Geschwindigkeitsfeld. Da die Teilchenabmessungen, d.h. die Partikeloberflächen, vernachlässigt wurden, sind hiermit die Grenzen des Modells erreicht. Die Betrachtung der Energiedissipation, viskoses Verhalten usw. wird bei der theoretischen Erfassung die Einbeziehung der Teilchenoberflächen notwendig machen. Darüber kann das Modell selbst keine Aussagen liefern. Jedoch wird diese fehlende Information dann ersetzt, wenn experimentelle Meßgrößen einen Bezug zum real ablaufenden Vorgang schaffen. Dies soll im folgenden überprüft werden durch Auswertungen der optischen Messungen an einigen Modellströmungen.

5 Mit Hilfe einer Approximation durch Polynome ließe sich eine wesentlich genauere Übereinstimmung zwischen Näherungsfunktion und numerischer Berechnung erzielen. Dabei wird aber die Formel sehr viel umfangreicher. Prinzipiell können auch andere Näherungsfunktionen zur Auswertung benutzt werden.

4.6 Brechungsindices in Abhängigkeit von der Volumenkonzentration

Entsprechend dem oben angenommenen theoretischen Modell wird der optische Weg K einer doppelbrechenden Lösung separiert in zwei Anteile,

- a) den optischen Weg im Lösungsmittel
- b) den optischen Weg im anisotropen Material.

Unter der Annahme der geradlinigen Lichtausbreitung erhält man dann bei einer Volumenkonzentration c von reinen Farbkristallen für den Brechungsindex

$$n_{Lsg.} = (1 - c) n_{homL.} + n_{MY} c \quad (4.6.1)$$

$$n_{1MY} = (a + b \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.2)$$

$$n_{2MY} = (a - b \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.3)$$

Man
erhält

$$n_{1Lsg.} = (1 - c) n_{homL.} + c (a \pm b \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.6.4)$$

a , b Konstanten

Diese Gleichung enthält noch die Größen a,b(und D). a und b sind Materialkonstanten ,D die Rotationsdiffusionskonstante. Für ein und dieselbe Konzentration und Temperatur sind diese Größen konstant.

5. Anwendung der Ergebnisse der Theorie bei einfacher Scherung

Kolloidale doppelbrechende Lösungen zeigen oft Nicht-Newton-sches Strömungsverhalten. Da die bisher verwendeten Auswerteverfahren auf den Bereich kleiner Schergradienten, wie sie z.B. bei den sog. "schleichenden" Strömungen vorherrschen, beschränkt waren, sind für den höheren Scherbereich mit veränderlicher Viskosität Messungen auch für einfache Strömungsformen nicht vorhanden. Es bietet sich daher an, für diese sog. Modellströmungen das Verhalten im strukturviskosen Bereich zu untersuchen. Als Strömungsform einfacher Geometrie wurde die Strömung zwischen zwei äquidistanten ebenen Platten (sog. Hagen-Poiseuille-Strömung) untersucht, die einerseits eine Schichtenströmung darstellt (es ist nur ein Geschwindigkeitsgradient vorhanden), zum anderen eine Änderung des Geschwindigkeitsgradienten von der Mitte bis zum Rand aufweist. Es wird angenommen, daß die theoretischen strömungsoptischen Beziehungen, die ja für konstante Gradienten bestimmt worden sind, bei veränderlichen Gradienten ebenso gültig sind. Das setzt voraus, daß auf Grund der Kleinheit der Teilchen örtlich die Geschwindigkeitsgradienten von höherer als erster Ordnung vernachlässigbar sind. Mit Hilfe der optischen Messung sollen zunächst Geschwindigkeitsprofile bestimmt und daran anschließend das Viskositätsverhalten untersucht werden. Vergleiche sollen mit Ergebnissen von herkömmlichen Meßmethoden durchgeführt werden. So wird einmal der Viskositätsverlauf aus der Messung des Druckabfalls bestimmt, zum anderen werden Messungen an hochwertigen Viskosimetern durchgeführt. Bei der optischen Messung der Interferenzlinien gilt folgende Beziehung (Merzkirch, 1974):

$$n - n_o = (N - N_o) \lambda / d \quad (5.0.1)$$

(o = Ruhezustand)

(N = Ordnung der Interferenzlinien)

Aus der Interferenzlinienzahl des Mach-Zehnder-Interferometers erhält man die Brechungsindices der Lösung. Nach Messung des Auslöschwinkels ψ im Ringspaltpolariskop wird die Diffusionskonstante D aus der theoretischen Beziehung Gl.(4.1.13a) ermittelt. Zur Elimination der Konstanten b wird Gl.(4.1.2) nach b aufgelöst und durch den Ausdruck θ_R dividiert, wobei R eine feste Stelle y (z.B. am Rand) kennzeichnet. Dann ist :

$$\theta = \frac{[n_1 - (1 - c) n_{\text{homL.}}]^2 - [n_2 - (1 - c) n_{\text{homL.}}]^2}{[n_{1R} - (1 - c) n_{\text{homL.}}]^2 - [n_{2R} - (1 - c) n_{\text{homL.}}]^2} \theta_R \quad (5.0.2)$$

bestimmbar aus den Verläufen von N_1 und θ_R , wobei der Wert θ_R zunächst geschätzt werden muß. Über die theoretische Bez. Gl.(4.4.13bis15) wird dann der Verlauf von du/dy bestimmt. Zweimalige Integration über y führt auf die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ (1. Näherung). Nach Vergleich mit dem gemessenen Wert der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}_M$ wird θ_R korrigiert und die Berechnung iterativ wiederholt, bis die mittleren Geschwindigkeiten übereinstimmen.

Ergebnisse dieser Berechnung sind in den Bildern 25 und 26 dargestellt (s. auch Kap. 10.).

5.1 Der experimentelle Versuchsaufbau

5.1.1 Strömungskreislauf

Entsprechend den folgenden Abbildungen wurde das Strömungssystem vom optischen Aufbau entkoppelt auf einem Drei-Koordinaten-Verschiebetisch aufgebaut, dessen Standfuß seitlich versetzt war, um den länglichen Glasbehälter, der den Strömungskanal enthielt, seitlich über den optischen Tisch fahren zu können. Der 2D-Strömungskanal wurde durch zwei Kunststoffplatten gebildet, die durch vier schraubbare Abstandshalter auf die gewünschte Spaltbreite justierbar waren.

Plattengeometrie:

Spaltabstand: 0.005 m

Breite: 0.11 m

Länge: jeweils 1 m

Der Deckel war schraubbar, die Platteneinsätze auswechselbar.

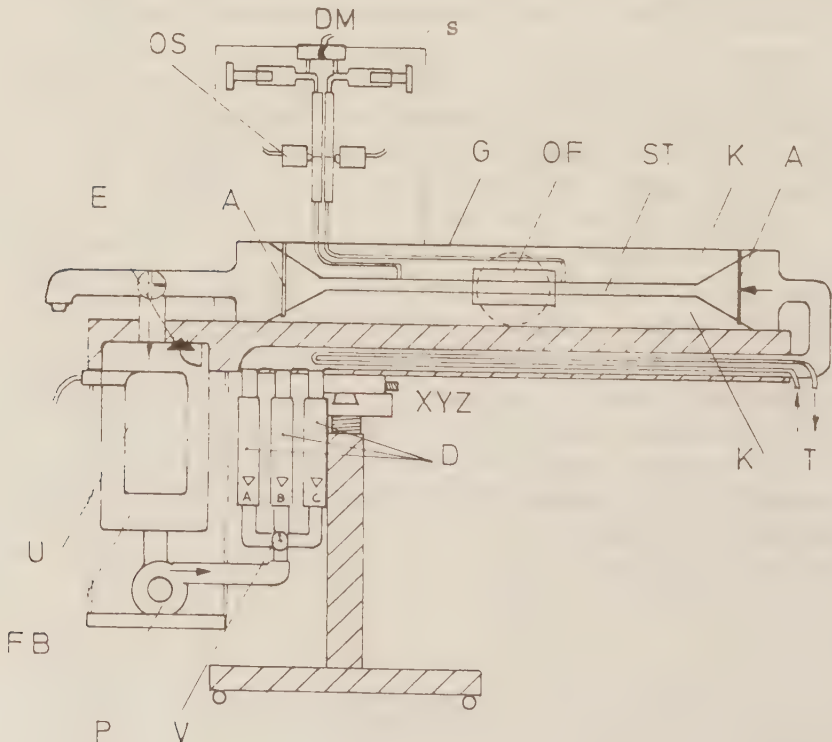


Bild 20: Strömungssystem zur Messung der Doppelbrechung und des Druckabfalls

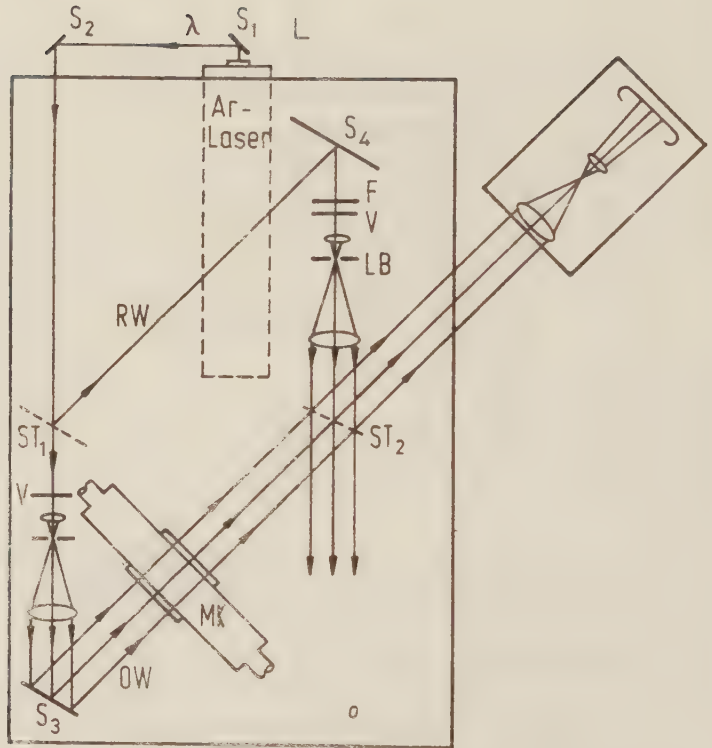
A	Abstandshalter
D	Durchflußmeßgeräte
DM	Differenzdruckmeßdose
E	Entlüftungsventil
FB	Flüssigkeitsbehälter
G	Glasbehälter mit Meßstrecke
K	Kunststoffplatten
OF	Objektfeld
OS	Optische Signalgeber
S	Spritzen zum Druckausgleich
U	Ultraschallgeber
P	Pumpe
T	Temperiereinrichtung
V	Ventil

Die maximal erreichbare mittlere Strömungsgeschwindigkeit bei einem Plattenabstand von 0.005 m betrug etwa 0.7 m/s.

5.1.2 Das optische System

Eine 220 kg schwere Granitplatte diente als Unterbau für das Mach-Zehnder- Interferometer (Bild 21). Die Platte war vertikal über pneumatische Rollbälge und horizontal über Dreipunkt-Schalenlager schwingungsfrei gelagert, um mechanische Störeinflüsse des Gebäudes (8.Stockwerk) auszukoppeln. Durch die räumliche Trennung von Referenz- und Objektstrahl ergibt sich eine große mechanische Empfindlichkeit des Interferometers gegenüber mechanischen Störeinflüssen. Die 2. Teilerplatte war über Differentialmikrometerschrauben verstellbar, damit konnte man Verschiebungen von Bruchteilen einer Wellenlänge reproduzieren.

Als Lichtquelle wurde ein Ar-Ionen- Laser benutzt, der bei einer Wellenlänge von $\lambda = 514,5$ nm eine Lichtleistung von 2000 mW auskoppelt. Die Abbildungsoptik wurde auf 2/3 der Objektiefe scharfgestellt, entsprechend der Fehlerminimierung der Streifenverschiebung im Feld kleiner Brechzahlgradienten (Panknin, 1977). Die photographischen Aufnahmen erfolgten mit einer Kleinbildkamera Canon Fl.



- O optische Platte
- S Spiegel
- St Strahlteiler
- V Verzögerungsplatte
- F Filter
- LB Lochblende
- RW Referenzwelle
- OW Objektwelle
- MK Meßkammer
- λ 514.5 nm (grünes Licht)

Bild 21: Aufbau des Mach- Zehnder- Interferometer

5.1.3 Ringspaltpolariskop

Das Ringspaltpolariskop besteht aus zwei konzentrischen Zylindern mit einem schmalen Spalt zwischen ihnen. Der äußere Zylinder wurde mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Der Spalt wurde mit einem aufgeweiteten parallelen Lichtstrahl durchleuchtet.

Abmessungen:

$D_a = 0.03 \text{ m}$; $D_i = 0.026 \text{ m}$; Tiefe: 0.05 m

Das Gerät besaß keine Temperiereinrichtung.

Bild 22 zeigt die kreuzförmige Lage der Isoklinen, wobei der Polarisator in horizontaler Richtung in Bezug zur Zeichenebene polarisiert war. Zur Auswertung wurde Gl.(2.1.1) benutzt, die Lage der Isoklinen wurde bei entgegengesetzten Drehrichtungen abfotographiert.

Nähere Erläuterungen dazu finden sich im Kap. 10.

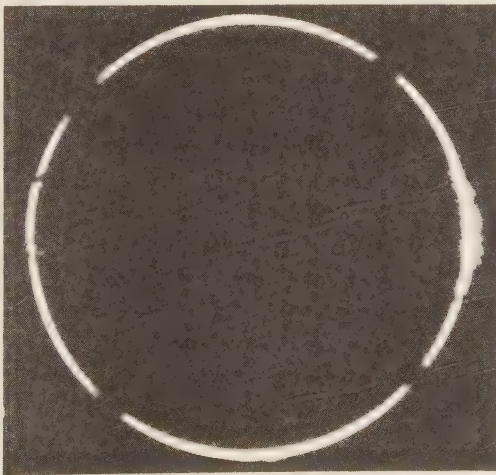


Bild 22: Isoklinenkreuz im Ringspaltpolariskop

5.1.4 Einrichtung zur Messung des statischen Druckes

Zur Bestimmung der Wandschubspannung der ausgebildeten Hagen-Poiseuille Strömung wurde der Abfall des statischen Druckes in Hauptströmungsrichtung gemessen.

Bei sehr langsam fließenden Strömungen ergibt sich die Schwierigkeit, daß sehr kleine Werte der Druckdifferenz bestimmt werden müssen. Dazu wurde eine spezielle Meßvorrichtung entwickelt, die es möglich machte, Druckdifferenzen bis unterhalb von 0.2 mm Wassersäule zu bestimmen (siehe Bild 20). Die Druckdifferenz wurde nicht direkt in der Flüssigkeit bestimmt, sondern im (abgeschlossenen) Luftraum über zwei Steigrohren (Präzisionskapillaren), die mit den beiden Meßbohrungen verbunden waren. Um eine präzise Messung zu ermöglichen, wurde mit zwei Luft-Kolbenspritzen ein Gegendruck aufgebracht, der die Absenkung der beiden Flüssigkeitssäulen auf das Ausgangsniveau bewirkte.

Zwei optische Signalgeber, die das Vorbeiwandern der Flüssigkeitskuppen registrierten, dienten zur Sollwerteinstellung des Ausgangsniveaus.

Es zeigte sich, daß mit diesem Verfahren die angegebenen geringen Druckdifferenzen genau genug gemessen werden können. Eine Tabelle mit den gemessenen Druckwerten findet sich in Kap. 10.

5.2 Bestimmung der Geschwindigkeitsprofile

Die Ordnung der Interferenzlinien und die entsprechenden Koordinatenwerte wurden mit Hilfe eines Rechnerprogramms weiterverarbeitet. Die Integration erfolgte mit dem Verfahren nach Simpson, die Iteration des Schätzwertes mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens. Die Bilder 23 und 24 zeigen die Linienverläufe einer MY-Lösung von 0.14 % im Mach-Zehnder-Interferometer. Den entsprechenden Verlauf der Brechungsindices zeigt Bild 25. Der Verlauf der Geschwindigkeitsgradienten in Bild 26 zeigt, daß bei den mittleren Strömungsgeschwindigkeiten $\bar{u} = 0.267 \text{ m/s}$ (B) und $\bar{u} = 0.235 \text{ m/s}$ (D) deutlich eine Ausprägung des Nicht-Newtonschen Strömungsverhalten vorhanden ist. Bei der Betrachtung der Geschwindigkeitsgradienten ist diese Erscheinung deutlicher zu erkennen als bei den Geschwindigkeitsprofilen, die z.T. eine geringere Abweichung vom Newtonschen Profil zeigen. Eine weitere Diskussion dieser Ergebnisse erfolgt in Kap. 8. Tabellen der berechneten Werte finden sich in Kap. 10.

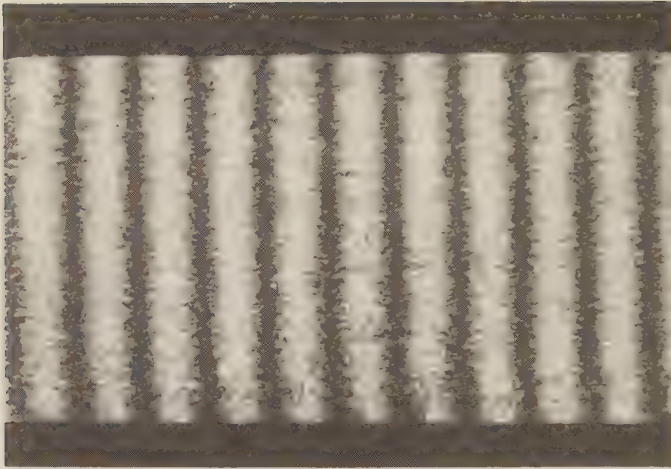


Bild 23: Mach-Zehnder Interferogramm einer MY- Lösung bei ruhendem Fluid und endlicher Streifenbreite; Höhe des Testkanals 5 mm.
 $c = 0.14 \%$

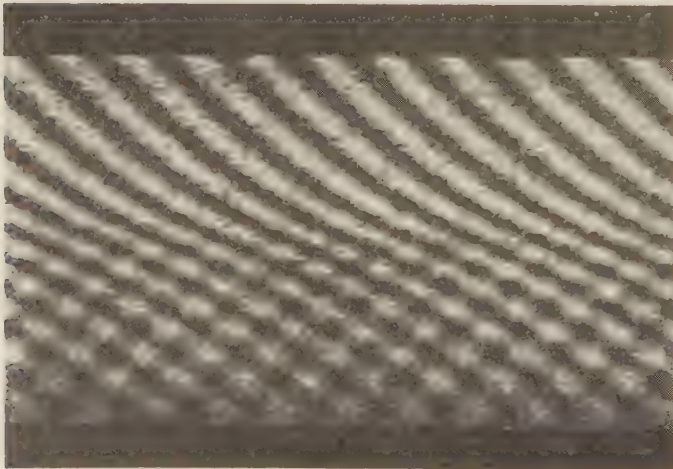


Bild 24: Mach-Zehnder Interferogramm der Strömung
 $c = 0.14 \%$ $\bar{u} = 0.267 \text{ m/s}$; $Re_O (\eta/\rho = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) \approx 530$

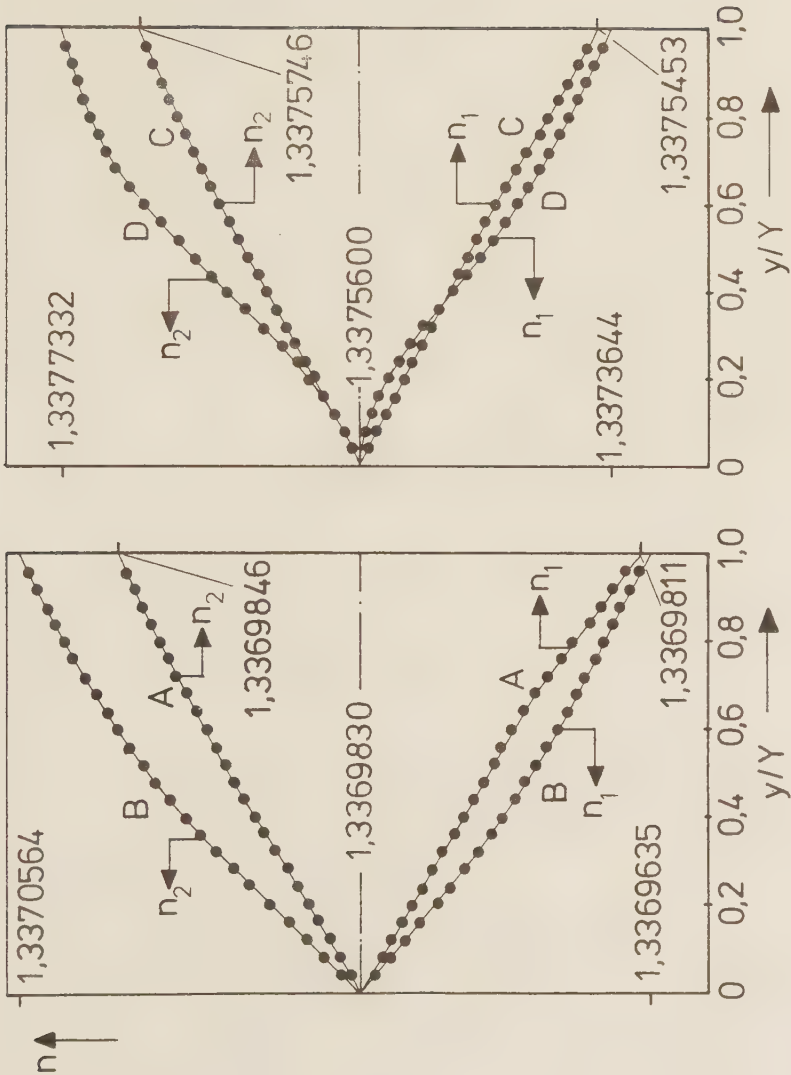


Bild 25 : Brechungsindizes der untersuchten MY-Lösungen gemessen über der Höhe $2Y$ des Testkanals. $y=0$ ist die Mitte des Kanals. n_2 ist in der oberen, n_1 in der unteren Hälfte aufgetragen. Die Brechungsindizes der ruhenden Lösung sind: $n_{0L} = 1.336983$ ($c=0.14\%$) und $n_{0L} = 1.33756$ ($c=0.27\%$). Die Kurven kennzeichnen vier verschiedene mittlere Durchflußgeschwindigkeiten: A: $\bar{u} = 0.006$ m/s; B: $\bar{u} = 0.267$ m/s; C: $\bar{u} = 0.0018$ m/s; D: $\bar{u} = 0.235$ m/s $c = 0.14\%$ (A,B) ; $c = 0.27\%$ (C,D)

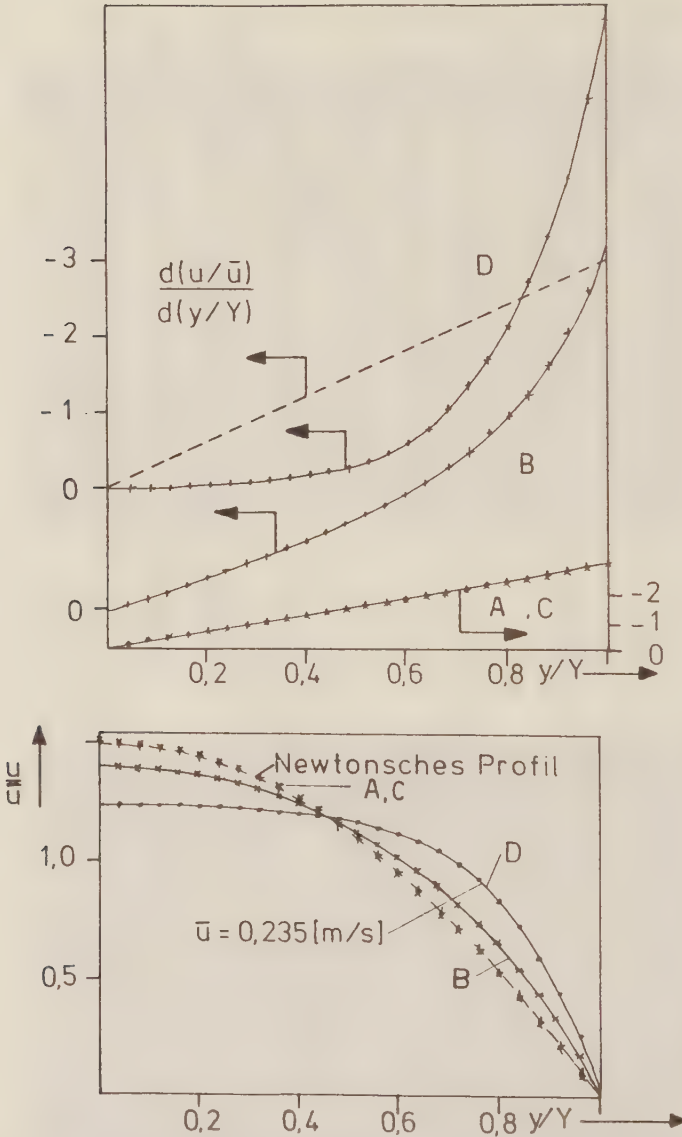


Bild 26: Geschwindigkeitsgradienten und Geschwindigkeitsprofile gemessen über der Höhe des Kanals

A: $\bar{u} = 0.006 \text{ m/s}$ B: $\bar{u} = 0.267 \text{ m/s}$; C: $\bar{u} = 0.0018 \text{ m/s}$;

D: $\bar{u} = 0.235 \text{ m/s}$;

$c = 0.14 \%$ (A,B) ; $c = 0.27 \%$ (C,D)

5.3 Bestimmung des Viskositätsverlaufs

Die im vorangegangenen Kapitel dargestellten Verläufe der Geschwindigkeitsgradienten kennzeichnen das rheologische Verhalten der verwendeten MY-Lösung. Die Abweichung gegenüber dem Newtonschen Verhalten bedeutet, daß der Wert der Viskosität in Abhängigkeit von der Schergröße veränderlich ist. Um eine allgemein vergleichbare Aussage über die Viskosität der MY-Lösung zu machen, muß man eine Deformationsgeschwindigkeit in die Betrachtung einführen, die unabhängig von der gewählten Geometrie der Strömungsform (hier: Strömung zwischen 2 Platten) ist. Die damit bestimmbare "wahre" Viskosität ist formal über die folgende Beziehung

$$\eta = \frac{\tau}{\epsilon} \quad (5.3.1) \quad (\epsilon = \text{Scherrate bzw. Deformationsgeschwindigkeit})$$

mit der Größe der Schubspannung τ und der "allgemeinen" Deformationsgeschwindigkeit ϵ verknüpft (Rabinowitsch, 1929). Die allgemeine Deformationsgeschwindigkeit ϵ wird aus der sog. mittleren Deformationsgeschwindigkeit ϵ_m bestimmt, wobei ϵ_m an die spezielle Strömungsgeometrie gebunden ist. ϵ_m liefert also keine allgemeingültige Aussage, sondern beschreibt die Schervorgänge einer speziellen Strömungsgeometrie.

Im folgenden soll nun der Verlauf der wahren Viskosität der verwendeten MY-Lösung aus unterschiedlichen Strömungsformationen bestimmt werden. Ziel ist es zu zeigen, daß aus der optischen Messung der Viskositätsverlauf beschrieben werden kann. Dies wird mit Hilfe von Vergleichsmessungen überprüft. Als Vergleichsmessungen wurden durchgeführt:

1. Messung des Druckabfalls der ausgebildeten Strömung zwischen 2 Platten (die gleiche Strömung, die optisch ausgewertet wurde).
2. Wandschubspannungsmessung mit Hilfe von Viskosimetern vom Typ Kegel-Platte und mit rotierendem Zylinder (Low shear 100, low shear 2, Rotaviško); diese Messungen wurden am Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Abt. Chemietechnik der Universität Dortmund durchgeführt.

Zur Ermittlung der Deformationsgeschwindigkeit ϵ gilt nach Rabinowitsch (1929) für die Kreisrohrströmung

$$\epsilon = \frac{3}{4} \epsilon_m + \frac{1}{4} \tau \frac{d\epsilon_m}{d\tau} \quad (5.3.2)$$

ϵ_m ist eine Funktion des Volumenstroms Q .

Bei der Bestimmung von ϵ der vollausgebildeten Zweiplattenströmung erhält man nach ähnlichen Betrachtungen (Schmitz und Merzkirch, 1983)

$$\epsilon = \frac{2}{3} \epsilon_m + \frac{1}{3} \tau \frac{d\epsilon_m}{d\tau} \quad (5.3.3)$$

Für die "scheinbare" Größe ϵ_m erhält man nach einer kurzen Rechnung

$$\epsilon_m(2Pl.) = \frac{Q(y)}{z \left[y - \frac{y^2}{3} \right]} \quad (5.3.4a)$$

Bei der Auswertung der optischen Messung wird nun nach Integration der Geschwindigkeit von der Kanalmitte aus bis zu einer Stelle y der Volumenstrom $Q(y)$ bestimmt. Die dort herrschende Schubspannung ergibt sich wegen des linearen Anstiegs von der Mitte aus bis zum Rand aus der Beziehung

$$\tau(y) = (y/y_R) \tau_R \quad (5.3.5) \quad \tau_R = \Delta p y_R / (l_1 - l_2) \quad (5.3.6)$$

hierbei wird Δp aus der Messung des Druckabfalls zwischen zwei statischen Druckmessbohrungen bestimmt, die in Strömungsrichtung den Abstand $(l_1 - l_2)$ haben. Die Auswertung der Gl. 5.3.3 und 5.3.1 liefert somit die Viskosität als Ergebnis der optischen Messung.

Als zweites Verfahren wurden die Werte des Druckabfalls der 2-Plattenströmung direkt mit Hilfe der Gl. 5.3.3, 5.3.4 und 5.3.1 ausgewertet. Im Gegensatz zur optischen Messung sind die entsprechenden Werte von ϵ und ϵ_m auf die Randwerte R bezogen. Entsprechendes gilt für die Meßwerte der Viskosimeter LS 100, LS 2 und Rotavisko. Bild 27 zeigt die Ergebnisse der drei unterschiedlichen Messverfahren. Es wurden zwei MY-Lösungen mit unterschiedlicher Konzentration untersucht. Die Lösung mit 0,27 % zeigt stärkere Ausprägung des nicht-Newtonschen Bereichs. Das Newtonsche Verhalten ist daran zu erkennen, daß die Viskosität bei veränderlicher Schergeschwindigkeit näherungsweise konstant bleibt.

Besondere Bedeutung ist der Verminderung der Viskosität für die 0,27 % ige Lösung im Bereich hoher Scherraten zuzuweisen. Hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der optischen Messung mit den anderen Messverfahren. Zusammenfassend ist festzustellen, daß mit der optischen Messmethode das strukturviskose Verhalten im nicht-Newtonschen Bereich sehr gut dargestellt werden kann.

Tabellen der berechneten Werte finden sich im Kap. 10.

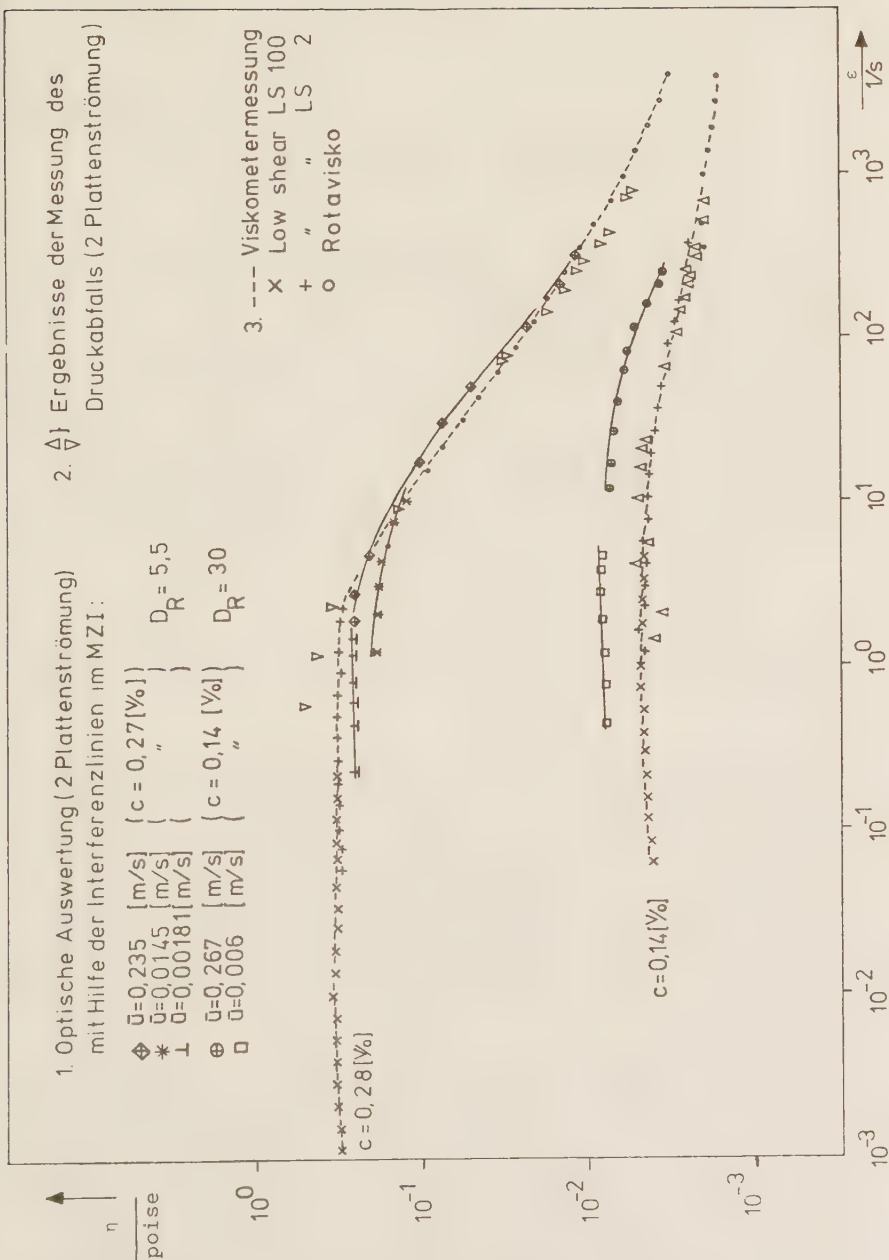


Bild 27: Viskositätsverlauf (Strukturviskosität) ermittelt aus den optischen Experimenten verglichen mit Ergebnissen von Viskosimetermessungen und Ergebnissen der Messung des Druckabfalls.

6. Anwendung der Ergebnisse der Theorie bei allgemeiner 2 D - Scherung einer kolloidhaltigen Lösung

Für den allgemeinen Fall einer 2-dimensionalen Strömung soll die prinzipielle Gültigkeit der erweiterten Theorie der Doppelbrechung nachgewiesen werden.

Das folgende Unterkapitel behandelt ein Problem, das bei der numerischen Auswertung beachtet werden sollte.

Anschließend wird für eine theoretische konvergente Düsenströmung die Bestimmung von Interferenzlinien (Isochromaten) erläutert. Ein Vergleich mit experimentell ermittelten Isochromatenlinien zeigt gute Übereinstimmung.

6.1 Versuch einer Begründung für das Problem, die allgemeine 2D -Strömung einer doppelbrechenden kolloidalen Flüssigkeit numerisch zu berechnen

Entsprechend Gl.(4.5.11) ist die strömungsoptische Funktion abhängig von den beiden Größen x^* und y^* , wobei $y^* = a_1 = \frac{dy}{dy} \frac{1}{D}$ und $x^* = a_3 = \frac{dx}{dx} \frac{1}{D}$ war. θ ist somit abhängig von zwei Gradienten. Wird nun eine optische Information ausgewertet, d.h. eine Zuordnung des θ - Wertes zu den Koordinaten x^* und y^* gesucht, so zeigt die Aufsicht des dreidimensionalen θ -Diagramms in Bild 28, daß dies entlang einer Höhenlinie $\theta = \text{konst.}$ zu geschehen hat, wobei für eine eindeutige Zuordnung die einzelne Meßinformation nicht mehr ausreicht. Hinzukommen muß z. B. die Aussage über die Steigung von θ in Bezug auf x^* und y^* . Das Gradientenfeld der Meßinformation wird z. B. bei Einführung eines Differenzschemas in die Berechnung eingebracht, wobei ein Feld von gemessenen und gerechneten Werten schrittweise abgearbeitet wird. Bei jedem Schritt wird eine unbekannte Größe berechnet, die beim nächsten Schritt als Konstante die Berechnung der nächsten Unbekannten beeinflußt.

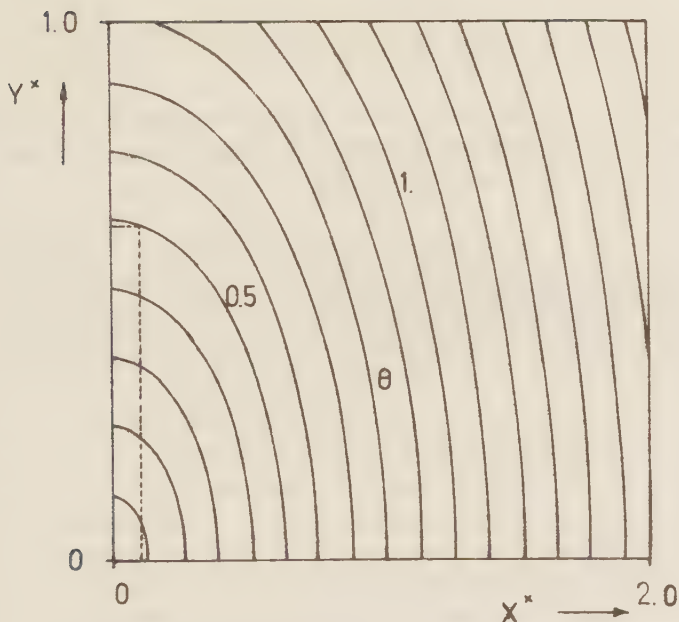


Bild 28: Strömungsoptische Funktion entspr. Bild 19

Im 9 Punkte-Differenzenschema kann bei vorgegebenem Wert x^* (z.B. $x^* = 1.$) über einen gemessenen θ -Wert die Bestimmung der Größe y^* der Näherungsfunktion erfolgen. Genauso kann der Rechengang von einem bekannten Wert y^* ausgehen und über θ die Größe x^* bestimmen. Sind nun die Größen x^* und y^* stark unterschiedlich, so können beim Fortschreiten zu den nächst folgenden Gitterpunkten sehr große Fehler entstehen, wenn die kleinere der beiden Größen die zu bestimmende Größe im 9 Punkte-Stern darstellt.

Das Bild 28 verdeutlicht anschaulich den Sachverhalt; da die 0-Linien senkrecht auf den Koordinatenachsen enden, werden die entsprechenden Steigungen Null.

Schlußfolgerung: Bei der numerischen Auswertung mit dem 9Punkte Differenzenschema für einen Wert $\theta = \text{konst.}$ führt die Berechnung bei Vorgabe einer der beiden Koordinatenwerte dann zu einem großen Fehler der zu bestimmenden Größe, wenn die zu bestimmende Größe sehr viel kleiner als die eingegebene Größe ist. Es muß also versucht werden, diesen Fall bei der numerischen Berechnung zu vermeiden.

6.2 Vergleich einer berechneten Verteilung von Interferenzlinien einer doppelbrechenden Kolloidlösung mit dem Liniensystem einer MY- Lösung

Als theoretische Strömung, die mehrere Geschwindigkeitskomponenten enthält, wurde eine ebene Düsenströmung gewählt. Entsprechend den Betrachtungen von Langlois(1964), die hier nur kurz kommentiert werden sollen, wurde folgender Weg beschritten:

Ausgehend von den Navier-Stokesschen Gleichungen für schleichende Strömung für den Fall divergenter Kanalerweiterung betrachtete er kleine aber nicht vernachlässigbare Konturänderungen. Diese Konturänderung führte er in Zusammenhang mit den Ortskoordinaten der Randkontur in die Gleichungen für u und v ein. Die Konturänderung entwickelte er in eine Potenzreihe, bei der er Potenzen von dritter und höherer Ordnung vernachlässigte. Die Stromfunktion nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\psi(x,y) = \frac{3 Q y}{4 h} \left\{ \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] + \frac{2}{5} D' \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]^2 \right\} \quad (6.2.1)$$

$$D' = y/(x-X) \quad (\text{Langlois, 1964})$$

Für eine Kontur

$$h(x) = H \left[1 - g \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad \delta = \frac{g H}{L} \quad (6.2.2)$$

erhält man dann:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{3 Q y}{4 H \left[1 - g \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \right]} \left\{ \left[1 - \frac{y^2}{3 H^2 \left[1 - g \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \right]^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{5} \delta^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{L} \right) \left[1 - \frac{y^2}{H^2 \left[1 - g \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \right]^2} \right] \right\} \quad (6.2.3) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist für die Konstanten $g=0.2$ und $L=7$ im folgenden Bild dargestellt:

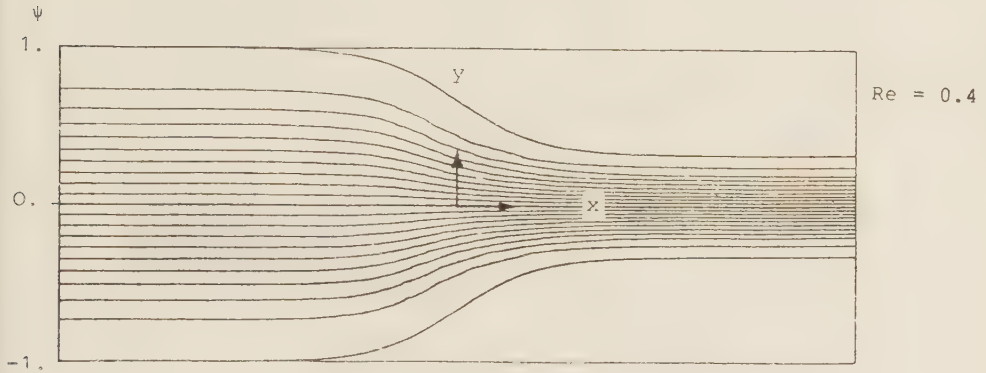


Bild 29: Stromfunktion der schleichenden Strömung mit $Re = 0.4$

Bild 30 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeitsprofile, wie sie sich aus der entsprechenden Differentiation der Stromfunktion für die oben genannten Werte ergeben.

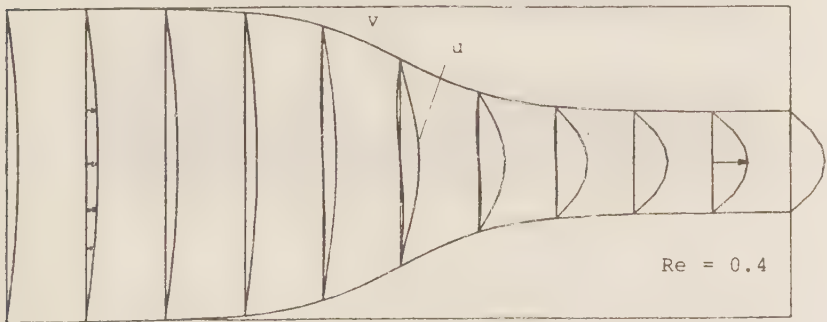


Bild 30: Verlauf der Geschwindigkeiten u und v nach Bild 29

Mit Hilfe der Geschwindigkeitsgradienten, die durch weitere Differentiation erhalten wurden, erfolgte nun die Bestimmung der θ -Werte nach Gl.(4.5.13). Mit Gl.(4.6.4) wurden die Werte der Brechungsindices für eine angenommene MY-Konzentration von

$c=0.2\%$ bestimmt. Aus Gl.(5.01) ergaben sich dann unter Berücksichtigung der Differenz der beiden Brechungsindices Ordnungen der Interferenzlinien (Isochromaten) (Bild 31). Als Ver-

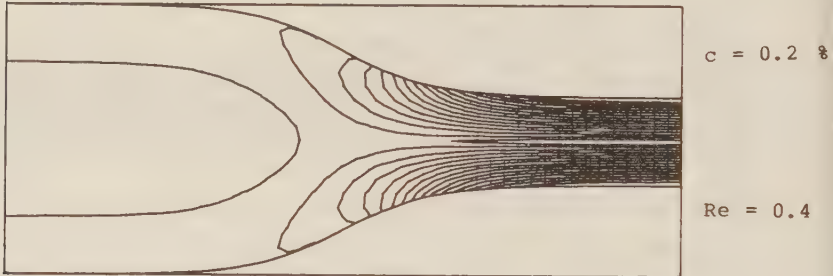


Bild 31: Nach Bild 29 mit der erweiterten Theorie berechnete Isochromatenlinien



Bild 32: Isochromatenlinien einer MY-Lösung

gleich zeigt Bild 32 das experimentell ermittelte Linienmuster in der Strömung einer MY-Lösung von $c = 0.2\%$. Dabei wird in der Mitte des Fotos der Bereich zwischen den Isochromatenlinien durch eine Isokline überlagert, die jedoch für die Auswertung der optischen Information keine Bedeutung hat. Der berechnete Linienverlauf wird durch das gemessene Isochromatenbild prinzipiell gut bestätigt. Zwar sind hierbei quantitative Aussagen über Abweichungen zwischen Theorie und Messung nicht möglich, aber das verwendete Modell wird durch die gute Übereinstimmung im Prinzip bestätigt.

7. Fehlerbetrachtung

7.1 Experimentelle Meßfehler

Bei der Bestimmung des Isochromatenverlaufs (Kap.6.2) und der Ermittlung des Viskositätsverhaltens (Kap.5.3) sind sowohl die experimentelle Erfassung der Meßgrößen als auch die Berechnungsverfahren für die Auswertung mit Fehlern behaftet. Diese Fehler sind darauf zurückzuführen, daß gewisse Größen nicht genau erfaßt werden können bzw. daß eine Reihe von Annahmen, die den Betrachtungen zugrunde liegen, nicht erfüllt sind.

Die wichtigste Fehlerquelle begründet sich auf den folgenden Überlegungen:

Die bei den Untersuchungen als Modellflüssigkeit verwendete MY-Lösung zeigt eine starke Abhängigkeit ihres Verhaltens von der Konzentration und der Temperatur. Nicht-Newtonsche Eigenschaften und die optische Aktivität sind in Abhängigkeit von möglichen Schwankungen dieser beiden Größen sehr unterschiedlich ausgeprägt. Darüber hinaus können die nicht-Newtonschen Eigenschaften und die optische Aktivität durch das Auftreten von verschiedenen großen Teilchen bzw. von Agglomeraten von Teilchen stark verändert werden. Veränderungen der Konzentration und die Bildung von Agglomeraten sind experimentell schwierig zu erfassen. Aus diesem Grunde sind Fehler, die auf diese Ursachen zurückzuführen sind, quantitativ schwer abzuschätzen. Das wiederum bedeutet, daß auch der Gesamtfehler, der bei der Betrachtung von Kap.6.2 bzw. Kap.5.3 auftritt, nicht quantitativ angegeben werden kann.

In Anbetracht der Eigenschaften der Modellflüssigkeit wurde besondere Sorgfalt auf die Minimierung dieser Fehler verwandt. Dazu gehörte u.a. eine Temperiervorrichtung (Kryostat), die die Temperatur im Bereich der Meßstrecke innerhalb von 0.1°C konstant hielt. Ferner wurde bei der Herstellung der Lösung durch Ultraschallbehandlung eine gute Vermischung und Größenverteilung des Farbstoffes erreicht. Geeignete Kontaktmaterialien (Glas, PVC und rostfreier Stahl) und Luftabschluß durch ein geschlossenes Meßsystem gewährleisteten lange

Haltbarkeit der Lösung bei konstanten Stoffeigenschaften. Es wird davon ausgegangen, daß die im folgenden aufgeführten, weiteren Fehlerquellen in ihrer Bedeutung hinter der zuvor genannten Fehlerursache zurücktreten.

a) Auf Grund der nicht idealen ebenen Kanalabmessungen ergeben sich bei der Bestimmung von Geschwindigkeitsprofilen der 2-Plattenströmung Abweichungen gegenüber dem angenommenen ebenen Fall. Auch in der Durchstrahlrichtung sind Grenzschichten der Kanalwände vorhanden. Es ergibt sich eine Auswirkung auf das optische Verhalten; diese ist jedoch relativ gering, da durch den Einfluß der Dreidimensionalität überwiegend die Randbereiche betroffen sind und auf Grund des Tiefen:Höhenverhältnisses von 22:1 der Randbereich einen relativ geringen Einfluß hat.

b) Die Erfassung der Interferenzlinienverläufe ist durch Ablesungenauigkeit und Störungen in der Intensitätsverteilung (nicht ideale Materialeigenschaften), für kleine Durchflußgeschwindigkeiten wegen der geringen Anzahl von Linien (geringe Informationsdichte) fehlerbehaftet. Die Größe dieses Fehlers entspricht den bei bekannten Verfahren der Interferenzlinienauswertung auftretenden Ungenauigkeiten.

c) Die Vereinfachungen des theoretischen Modells weichen von den Gegebenheiten der real wirksamen Einflußgrößen ab. Diese sind u.a. Polydispersität, Trägheitskräfte, endliche Teilchenabmessungen und Einfluß der Geschwindigkeitsableitungen höherer Ordnung. Mögliche Fehlerursachen im Zusammenhang mit der Theorie wurden in den vorangegangenen Kapiteln bereits diskutiert.

7.2 Fehler der Näherungsfunktion für θ

Bezüglich der Genauigkeit ergab sich im Bereich $0 < x^* < 10$. und $0 < y^* < 10$ ein mittlerer Fehler von 3.39%.

Fehler der Näherungsfunktion:

x	y	$\Theta_{\text{Näh}}$	Θ_{exakt}	$\Theta_{\text{Näh}} - \Theta_{\text{exakt}}$
				Θ_{exakt}
0	0	0.00000000E+00	0.0	0.0
0	2	0.13962357E+01	1.37194737	0.0177
0	4	0.22251186E+01	2.15572	0.0321
0	6	0.26733013E+01	2.5370	0.0557
0	8	0.29371328E+01	2.8714	0.0228
0	10	0.31072718E+01	3.1049	0.0007
2	0	0.15157981E+01	1.5394	-0.015
2	2	0.20300621E+01	1.9061	0.0649
2	4	0.25120288E+01	2.4046	0.0446
2	6	0.28283377E+01	2.7328	0.0349
2	8	0.30327110E+01	2.9953	0.01247
2	10	0.31717086E+01	3.1232	0.0155
4	0	0.27701472E+01	2.7983	-0.0100
4	2	0.29962308E+01	2.8403	0.0548
4	4	0.31378222E+01	2.9480	0.0643
4	6	0.32197045E+01	3.0604	0.0520
4	8	0.32905815E+01	3.1797	0.0348
4	10	0.33517164E+01	3.3053	0.0140
6	0	0.36959043E+01	3.7344	-0.0103
6	2	0.37843903E+01	3.6904	0.0254
6	4	0.37812949E+01	3.5702	0.0590
6	6	0.37031522E+01	3.5791	0.0346
6	8	0.36441670E+01	3.5462	0.0276
6	10	0.36138293E+01	3.6132	0.0001
8	0	0.43527678E+01	4.3515	0.0002
8	2	0.43788575E+01	4.3002	0.018
8	4	0.43206934E+01	4.2039	0.02776
8	6	0.41717092E+01	4.0600	0.0275
8	8	0.40264934E+01	3.9654	0.0153
8	10	0.39184201E+01	3.9331	-0.0037
10	0	0.48185714E+01	4.8177	0.0001
10	2	0.48190509E+01	4.7204	0.0208
10	4	0.47451904E+01	4.6541	0.0195
10	6	0.45787072E+01	4.5046	0.0164
10	8	0.43919814E+01	4.3473	0.0102
10	10	0.42315829E+01	4.2849	-0.0124

$$\overline{\Delta f} = (1/n) \sum_{i=1}^n \Delta f_i = 0.0339$$

8. Diskussion der Ergebnisse

In den vorangegangenen Kapiteln ergeben sich insbesondere die beiden folgenden Ergebnisse:

1. Mit der optischen Methode der Strömungsdoppelbrechung kann das Fließverhalten der MY-Lösungen in der Strömung zwischen zwei ebenen Platten bestimmt werden.

2. Der allgemeine Fall zweidimensionaler Strömungen mit vier unterschiedlichen Geschwindigkeitsgradienten wird am Beispiel einer konvergenten Düsenströmung bei kleinen Werten der Scher-rate mit Hilfe der Doppelbrechungsmethode quantitativ dargestellt.

Zum Punkt 1. ist auszuführen, daß die Ergebnisse der Geschwindigkeitsbestimmung (Bild 26) und das Viskositätsverhalten (Bild 27) zeigen, daß die Methode der Strömungsdoppelbrechung sehr gut in den nicht-Newtonschen Bereich ausgedehnt werden kann. So zeigt das Viskositätsverhalten, ermittelt aus der optischen Messung, im Vergleich zu den konventionellen rheologischen Meßmethoden eine sehr gute Übereinstimmung. Bei kleinen Scher-raten (kleine mittlere Durchflußgeschwindigkeit) ist die Viskosität nahezu konstant, was durch einen horizontalen Verlauf der Viskosität in Abhängigkeit von der mittleren Deformationsgeschwindigkeit gekennzeichnet ist (Bild 27). Das Newtonsche Verhalten in diesem Bereich wird durch die Ergebnisse der Viskosimetermessung besonders deutlich bestätigt. Bei höheren Deformationsgeschwindigkeiten zeigt sich besonders bei der Lösung mit der höheren Konzentration (0.27 %) zunehmend ein starker Abfall (Strukturviskosität). Hier stimmen die Ergebnisse der optischen Messung sehr gut mit den Messergebnissen der Viskosimeter und des Druckabfalls überein. Bei der Lösung mit der geringeren Konzentration (0.14 %) zeigt sich eine viel schwächere Ausprägung des strukturviskosen Verhaltens. Hierbei tritt der Abfall der Viskosität bei zunehmender Durchflußgeschwindigkeit nur relativ gering in Erscheinung. Die Kurven aus optischer Messung und der beiden viskosimetrischen Verfahren sind für $c=0.14\%$ um einen merklichen Betrag parallelverschoben. Dies deutet darauf hin, daß die optische Mes-

sung bei einer gegenüber den anderen Meßverfahren geringfügig abweichenden Temperatur aufgenommen wurde. Die Temperatur hat eine starke Auswirkung auf die Viskosität und damit auf die Wandreibungskräfte, wodurch auch die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit (Schwebekörper der Durchflussmessgeräte) beeinflußt wird. Jedoch zeigen die Verläufe der Kurven gleiches Verhalten.

Die Bedeutung der Ergebnisse in Bild 27 liegen nicht darin, eine neue Methode zur Viskositätsmessung vorzustellen. Mit der optischen Methode der Strömungsdoppelbrechung werden primär Geschwindigkeitsgradienten ermittelt. Der Vergleich auf der Basis der Viskositätsmessungen in Bild 27 dient dazu, die Eig-nung des hier entwickelten Modells der Strömungsdoppelbrechung im nicht-Newtonschen Bereich zu bestätigen.

Im Prinzip liefert die Strömungsdoppelbrechung Geschwindigkeitsverläufe, ohne daß eine Kenntnis des Viskositätsverhaltens des Fluides notwendig ist. Die Strömungsdoppelbrechung ist eine optische Ganzfeldmethode. Im Vergleich zu anderen Sondenmessungen (z.B. LDA) gelten die bekannten Aussagen über Vor- und Nachteile dieser beiden Verfahren.

Zu Punkt 2. ist auszuführen, daß die Ergebnisse der Untersuchung auf den Bereich kleiner Scherraten (schleichende Strömung) bezogen sind. Optische Messungen in diesem Bereich sehr geringer Geschwindigkeiten ergeben gute bis sehr gute Meßinformationen. Dabei ist bekannt, daß andere Verfahren zur Geschwindigkeitsmessung bei solch geringen Strömungsgeschwindigkeiten erhebliche Fehlerraten aufweisen.

Bild 31 und 32 zeigen deutlich eine Übereinstimmung im Linienverlauf der gerechneten und der gemessenen Isochromaten. Die Gültigkeit des theoretischen Modells der Strömungsdoppelbrechung ist somit für den Bereich kleiner Scherraten nachgewiesen. Für höhere Scherraten (nicht-Newtonscher Bereich) ist aus den bisherigen Untersuchungen keine Aussage möglich. Auf eine optische Auswertung entsprechender Strömungen wurde verzichtet, weil für diesen Bereich z.Zt. keine Vergleichsmessungen bzw. theoretische Berechnungen vorliegen. Die theoretische Be-

stimmung dieser Strömung erfordert eine Kenntnis über das Verhalten und das Zusammenwirken von Scher- und Dehnviskosität. Darüber liegen bisher keine gesicherten Ergebnisse vor. Offensichtlich bietet die Strömungsdoppelbrechung eine Möglichkeit, bei der Weiterentwicklung der theoretischen Ansätze entsprechende Kontrollmessungen zu liefern.

Die weitere Untersuchung im Rahmen des o.a. Modells kann darüberhinaus die Möglichkeit eröffnen, die Auswertung der optischen Information zu vereinfachen. Bei Kenntnis der beiden Konstanten a und b (Gl.4.4.3 und 4.4.4) reduziert sich der Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Schergröße auf eine der beiden Gleichungen. Während die Konstante a den mittleren Brechungsindex der Lösung beschreibt, (der auch bei ruhender Flüssigkeit bestimmt werden kann), ist die experimentelle Ermittlung von b mit Hilfe des hier beschriebenen optischen Verfahrens nur bei auftretender Doppelbrechung durchführbar (vgl.Gl.4.4.3!). Die mit Hilfe der experimentellen Information berechneten Werte von b sind in Kap.10.aufgeführt. Die Bedeutung von a und b liegen darin, daß damit die Werte der Polarisierbarkeiten bestimmbar sind. Die Ergebnisse für b in Kap. 10. zeigen, daß für ein und denselben Strömungszustand die Werte von b nahezu konstant sind, was auf Grund der oben gemachten Aussagen zu erwarten ist. a und b müßten in einer Vergleichsmessung über die polarisationstheoretischen Eigenschaften der MY-Kristalle ermittelt werden. Es ist bekannt, daß die MY-Kristalle, wenn sie außerhalb der wässrigen Lösung isoliert sind, sich optisch anders verhalten als in Lösung. Es wäre interessant zu klären, ob dabei quantitative Übereinstimmung erhalten wird. Mit Hilfe genauerer Untersuchungen der Strömungsdoppelbrechung können somit vielleicht weiterreichende Fragen des optischen Verhaltens beantwortet werden.

9. Zusammenfassung

Der Effekt der Strömungsdoppelbrechung wurde bei verdünnten MY-Lösungen als Modellflüssigkeit untersucht. Dazu wurde als neues Verfahren ein Referenzstrahl-Interferometer (Mach-Zehnder) eingesetzt, das die getrennte Bestimmung der bei der Doppelbrechung auftretenden Brechungsindizes n_1 und n_2 möglich machte. Das bisherige Verfahren konnte nur die Differenz der beiden Brechungsindizes erfassen. Entsprechend waren die bisher bekannten theoretischen Beziehungen auf die Beschreibung dieser Größe ausgerichtet, wobei zwei grundlegende Modelle zu unterscheiden sind:

Die Waylandsche Theorie beschreibt in einer komplizierten Beziehung die Doppelbrechung in Abhängigkeit von zwei optisch erfassbaren Größen, den Isochromaten- und den Isoklinenlinien, wobei die Meßbarkeit der Isoklinen in der Praxis stark eingeschränkt ist. Als Folge davon wird die vollständige Waylandsche Beziehung für die experimentelle Auswertung nicht anwendbar. Die Waylandsche Formel verliert nach einer Linearisierung jedoch die Abhängigkeit von der Isoklineninformation. Als Nachteil müssen dafür Beschränkungen auf sehr kleine Schergradienten in Kauf genommen werden.

Die frühere Theorie von Boeder beschreibt in einfacher Weise das optische Verhalten doppelbrechender schlanker Teilchen, wobei als Einschränkung nur die Wirkung eines einzelnen Geschwindigkeitsgradienten behandelt wird. Die meisten in der Praxis auftretenden Strömungen haben mehrere unterschiedliche Geschwindigkeitsgradienten. Es war daher notwendig, für den allgemeinen Fall von ebenen Strömungen eine theoretische Erweiterung durchzuführen. Bei der theoretischen Entwicklung ergab sich, daß die strömungsoptischen Beziehungen ohne Einschränkung auf kleine Schergradienten darstellbar sind. Die Strömungsdoppelbrechung liefert im Prinzip Geschwindigkeitsverläufe, ohne daß eine Kenntnis des Viskositätsverhaltens des Fluids notwendig wäre. Am Beispiel einer ebenen Hagen-Poiseuille-Strömung wurde das nicht-Newtonsche Strömungsverhalten bei höheren Scherraten untersucht, wobei Vergleichsmessungen die optischen Ergebnisse bestätigen konnten. Für den Fall einer allgemeinen 2D-Strömung wurde die erweiterte Boedersche Theorie auf eine ebene Düsenströmung angewandt, so daß entsprechende optische Experimente ausgewertet und mit berechneten Strömungsformen verglichen werden konnten. Dies wurde aber nur im Newtonschen Bereich durchgeführt, da für nicht-Newtonsche Strömung der untersuchten Flüssigkeit keine theoretisch berechneten Ergebnisse vorhanden sind.

10. Tabellen der Meßwerte und der Ergebnisse

In den folgenden Tabellen sind Meßwerte aufgeführt, die durch Mittelung von mindestens 3 annähernd gleich großen Meßdaten gewonnen wurden. Ergab sich im Einzelfall dabei keine gute Übereinstimmung, so wurde die Zahl der zur Mittelung herangezogenen Meßdaten entsprechend erhöht.

10.1 Rotationsdiffusionskonstante D (s.Kap.5.1.3)

Die Bestimmung von D erfolgte durch Messung des Isoklinenwinkels ψ im Ringspalt polarisierendes, wobei die Schergeschwindigkeit ϵ mit Hilfe der Drehgeschwindigkeit des äußeren Zylinders und der Geometrie ermittelt wurde. Der theoretische Isoklinenwinkel ψ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Schergeschwindigkeit entsprechend Bild 13 führte durch Vergleich auf den Wert von D .

Wegen der starken Abhängigkeit von der Temperatur konnte die Winkelmessung mit Hilfe des Ringspalt polarisierendes auf Grund fehlender Temperiereinrichtung nicht quantitativ verwertet werden. Der Wert von D wurde deshalb iterativ bei der Bestimmung der Geschwindigkeitsprofile durch Einsetzen unterschiedlicher Werte von D ermittelt. Beim richtigen Wert von D zeigt sich Übereinstimmung zwischen den Viskositätswerten, die aus den Geschwindigkeitsprofilen ermittelt wurden (optische Messung) und den Ergebnissen der Viskosimetermessung.

Ergebnisse: $T = 25^{\circ}\text{C}$
 Fluid Rotationsdiffusionskonstante
 $[D] = [1/\text{s}]$
 C14 (0.14%MY) 5.5
 C27 (0.27%MY) 30.0

Die Ergebnisse werden bestätigt durch die Werte der optischen Konstanten b , die für verschiedene Konzentrationen und Durchflußgeschwindigkeiten näherungsweise übereinstimmen. (siehe Kap. 10.4)

10.2 Eichung der Durchflußmeßgeräte

10.2.1 Geräteangaben

Hersteller: Krohne
 Typ : a) 18.08
 b) 21.12
 c) 21.24

10.2.2 Meßwerte

Fluid: Milling Yellow C14 und C27
 $T = 25^{\circ}\text{C}$

Der Massenstrom $\dot{Q}$ wurde mit Hilfe der Durchflußzeit eines definierten Volumens von maximal 6 Litern bestimmt.

Mess. Nr.	Fluid	DMG	Skalenteile	Volumenstrom $\dot{Q}$ 10^3 dm^3/s
1	C14	18.08	0	0.75
2	C14	18.08	5	1.1
3	C14	18.08	23	1.85
4	C14	18.08	41	2.7
5	C14	18.08	82	4.6

Mess. Nr.	Fluid	DMG	Skalenteile	Volumenstrom Q 10^3 dm^3/s
6	C14	18.08	133	7.1
7	C14	18.08	178	9.32
8	C14	18.08	199	10.35
9	C14	21.12	20	21.8
10	C14	21.12	39	26.0
11	C14	21.12	59	42.8
12	C14	21.12	81	57.0
13	C14	21.12	102	71.0
14	C14	21.12	123	85.8
15	C14	21.12	139	98.7
16	C14	21.12	160	115.0
17	C14	21.12	181	131.5
18	C14	21.12	200	147.0
19	C14	21.24	20	99.0
20	C14	21.24	40	150.7
21	C14	21.24	59	212.5
22	C14	21.24	81	291.0
23	C27	18.08	0	0.2
24	C27	18.08	5	0.29
25	C27	18.08	10	0.33
26	C27	18.08	20	0.59
27	C27	18.08	30	0.83
28	C27	18.08	40	1.1
29	C27	18.08	60	1.76
30	C27	21.12	2	3.6
31	C27	21.12	20	14.1
32	C27	21.12	40	23.9
33	C27	21.12	60	33.4
34	C27	21.12	80	43.7
35	C27	21.12	100	56.4
36	C27	21.12	120	71.6
37	C27	21.12	140	87.2
38	C27	21.12	160	103.0
39	C27	21.12	180	117.4

Mess. Nr.	Fluid	DMG	Skalenteile	Volumenstrom Q $10^3 \text{ dm}^3/\text{s}$
40	C27	21.12	200	130.8
41	C27	21.24	10	60.5
42	C27	21.24	20	91.8
43	C27	21.24	40	130.0
44	C27	21.24	60	190.0
45	C27	21.24	80	215.5
46	C27	21.24	100	230.0

10.2.3 Eichkurven der Durchflußmeßgeräte

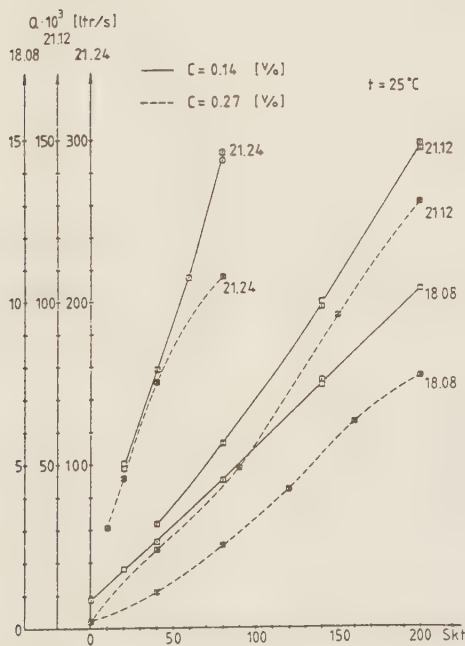


Bild 33: Eichkurven der Durchflußmeßgeräte

10.3 Druckabfall in der 2-Plattenströmung (s.Kap.5.1.4)

Kanalhöhe : $2b = 5.0 \text{ mm}$

Tiefe : $z = 110 \text{ mm}$

Abstand der Druckmeßbohrungen : $L = 350 \text{ mm}$

Differenzdruckdosen: Baratron 10 mmWS

Bell&Howell 170 mmWS

Mess. Nr.	Fluid	DMG Typ	Δp mm WS	$Q \cdot 10^3$ dm^3/s	Skt.
47	C14	18.08	0.12	0.75	0
48	C14	18.08	0.17	1.1	5
49	C14	18.08	0.41	1.85	23
50	C14	18.08	0.49	2.7	41
51	C14	18.08	0.92	4.6	82
52	C14	18.08	1.37	7.1	133
53	C14	18.08	1.80	9.32	178
54	C14	18.08	1.95	10.35	199
55	C14	21.12	4.11	26.00	39
56	C14	21.12	5.43	42.8	59
57	C14	21.12	6.83	57.0	81
58	C14	21.12	7.94	71.0	102
59	C14	21.12	9.13	85.8	123
60	C14	21.12	9.9	98.0	139
61	C14	21.12	11.08	115.0	160
62	C14	21.12	12.31	131.5	181
63	C14	21.12	13.21	147.0	200
64	C14	21.24	10.38	99.0	20
65	C14	21.24	14.6	150.7	40
66	C14	21.24	18.16	212.5	59
67	C14	21.24	23.44	291.0	81
68	C27	18.08	4.7	0.2	0
69	C27	18.08	5.2	0.29	5
70	C27	18.08	5.6	0.33	10
71	C27	18.08	8.3	0.59	20
72	C27	18.08	8.7	0.83	30
73	C27	18.08	13.2	1.1	40
74	C27	18.08	18.1	1.76	60

Mess. Nr.	Fluid	DMG Typ	Δp mm WS	$Q \cdot 10^3$ dm^3/s	Skt.
75	C27	21.12	22.0	3.6	2
76	C27	21.12	41.0	14.1	20
77	C27	21.12	44.0	23.9	40
78	C27	21.12	48.0	33.4	60
79	C27	21.12	50.0	43.7	80
80	C27	21.12	51.0	56.4	100
81	C27	21.12	53.0	71.6	120
82	C27	21.12	56.0	87.2	140
83	C27	21.24	68.0	190.0	60
84	C27	21.24	71.0	215.5	80

10.4 Interferenzlinienordnung in der 2-Platten-
strömung und Ergebnisse der optischen Geschwin-
digkeitsbestimmung (s.Kap.5.2)

Meßverfahren: Mach-Zehnder-Interferometer,
 $\lambda = 514.5 \text{ nm}$, Film: Agfaortho 15 DIN

Die folgenden Tabellen geben Meßwerte und Ergebnisse der
theoretischen Berechnung wieder.

(Verläufe der Geschwindigkeiten und der Geschwindigkeitsgra-
dienten im Bild 26)

Mess. Nr.	Fluid	Kanal- höhe y/b	mittl. Geschw. $\bar{u}$ m/s	Interferenz- linienordnung N_1	N_2	$u/\bar{u}$	du/dy $1/\text{s}$	opt. Konst. b
85	C14	0.	$6.0 \cdot 10^{-3}$	0.0	0.0	1.56	0.	0.
86	C14	0.04		-0.019	0.013	1.55	0.13	2.496
87	C14	0.08		-0.037	0.025	1.54	0.25	2.496

Mess. Nr.	Fluid	Kanal- höhe y/Y	mittl. Geschw. $\bar{u}$ m/s	Interferenz- linienordnung N_1	N_2	$u/\bar{u}$	du/dy 1/s	opt. Konst. b
88	C14	0.12	$6.0 \cdot 10^{-3}$	-0.044	0.042	1.53	0.34	2.496
89	C14	0.16		-0.062	0.058	1.51	0.48	2.496
90	C14	0.20		-0.077	0.073	1.48	0.61	2.495
91	C14	0.24		-0.092	0.088	1.46	0.73	2.495
92	C14	0.28		-0.106	0.106	1.42	0.84	2.495
93	C14	0.32		-0.121	0.125	1.38	0.99	2.495
94	C14	0.36		-0.137	0.137	1.34	1.11	2.494
95	C14	0.40		-0.152	0.150	1.28	1.21	2.494
96	C14	0.44		-0.167	0.165	1.24	1.34	2.494
97	C14	0.48		-0.177	0.175	1.18	1.42	2.493
98	C14	0.52		-0.192	0.188	1.11	1.53	2.493
99	C14	0.56		-0.202	0.200	1.05	1.62	2.493
100	C14	0.60		-0.217	0.215	0.98	1.74	2.492
101	C14	0.64		-0.237	0.231	0.9	1.89	2.491
102	C14	0.66		-0.254	0.248	0.83	2.03	2.491
103	C14	0.72		-0.273	0.262	0.74	2.16	2.491
104	C14	0.76		-0.290	0.271	0.65	2.27	2.489
105	C14	0.80		-0.308	0.285	0.55	2.40	2.489
106	C14	0.84		-0.335	0.294	0.45	2.54	2.488
107	C14	0.88		-0.348	0.306	0.34	2.65	2.487
108	C14	0.92		-0.362	0.317	0.23	2.75	2.486
109	C14	0.96		-0.383	0.333	0.12	2.90	2.485
110	C14	1.00		-0.408	0.573	0.0	3.06	
$\bar{D}_R = 30.0 \text{ 1/s}$								
111	C14	0.0	0.267	0.0	0.0	1.43	0.0	
112	C14	0.04		-0.22	0.25	1.43	0.06	1.641
113	C14	0.08		-0.47	0.53	1.42	0.14	1.615
114	C14	0.12		-0.69	0.75	1.41	0.21	1.574
115	C14	0.16		-0.88	1.03	1.40	0.29	1.513
116	C14	0.20		-1.16	1.28	1.39	0.38	1.507
117	C14	0.24		-1.31	1.56	1.37	0.46	1.501
118	C14	0.28		-1.53	1.78	1.34	0.54	1.494
119	C14	0.32		-1.72	2.06	1.32	0.63	1.486

Mess. Fluid Kanal-		mittl.	Interferenz-				opt.	
Nr.		höhe	Geschw.	linienordnung			Konst.	
		y/Y	$\bar{u}$	N_1	N_2	$u/\bar{u}$	du/dy	
			m/s				b	
120	C14	0.36	0.267	-1.91	2.28	1.29	0.72	1.478
121	C14	0.40		-2.06	2.44	1.26	0.80	1.471
122	C14	0.44		-2.25	2.69	1.22	0.91	1.462
123	C14	0.48		-2.34	2.88	1.18	0.99	1.455
124	C14	0.52		-2.56	3.06	1.14	1.12	1.446
125	C14	0.56		-2.69	3.25	1.09	1.23	1.438
126	C14	0.60		-2.84	3.41	1.04	1.36	1.430
127	C14	0.64		-3.00	3.56	0.98	1.50	1.423
128	C14	0.68		-3.13	3.72	0.91	1.65	1.415
129	C14	0.72		-3.22	3.88	0.84	1.81	1.409
130	C14	0.76		-3.38	4.06	0.76	2.05	1.400
131	C14	0.80		-3.50	4.16	0.67	2.24	1.395
132	C14	0.84		-3.63	4.25	0.57	2.45	1.389
133	C14	0.88		-3.75	4.40	0.46	2.76	1.382
134	C14	0.92		-3.88	4.59	0.33	3.27	1.374
135	C14	0.96		-4.00	4.69	0.18	3.74	1.367
136	C14	1.00		-4.16	4.84	0.0	4.44	
$\bar{u}_{D_R} = 30.0 \text{ 1/s}$								
137	C27	0.0	1.82	0.0	0.0	1.56	0.0	
138	C27	0.04	10^{-3}	-0.156	0.123	1.55	0.13	7.185
139	C27	0.08		-0.28	0.246	1.54	0.23	7.184
140	C27	0.12		-0.392	0.392	1.53	0.35	7.184
141	C27	0.16		-0.526	0.515	1.51	0.46	7.183
142	C27	0.20		-0.668	0.649	1.48	0.59	7.181
143	C27	0.24		-0.806	0.784	1.46	0.71	7.180
144	C27	0.28		-0.929	0.941	1.42	0.83	7.178
145	C27	0.32		-1.075	1.042	1.38	0.95	7.176
146	C27	0.36		-1.209	1.198	1.34	1.08	7.173
147	C27	0.40		-1.366	1.333	1.29	1.21	7.170
148	C27	0.44		-1.467	1.456	1.24	1.31	7.168
149	C27	0.48		-1.624	1.568	1.19	1.43	7.164

Mess.	Fluid	Kanal-	mittl.	Interferenz-				opt.
Nr.		höhe	Geschw.	linienordnung			Konst.	
		y/Y	$\bar{u}$	N_1	N_2	$u/\bar{u}$	du/dy	b
			m/s				1/s	
150	C27	0.52	1.82 10^{-3}	-1.724	1.741	1.13	1.54	7.161
151	C27	0.56		-1.859	1.826	1.06	1.66	7.157
152	C27	0.60		-1.982	1.994	0.98	1.79	7.153
153	C27	0.64		-2.161	2.106	0.91	1.92	7.148
154	C27	0.68		-2.284	2.218	0.83	2.03	7.144
155	C27	0.72		-2.419	2.374	0.74	2.16	7.138
156	C27	0.76		-2.632	2.486	0.65	2.31	7.130
157	C27	0.80		-2.744	2.621	0.55	2.42	7.126
158	C27	0.84		-2.889	2.722	0.45	2.53	7.120
159	C27	0.88		-3.035	2.811	0.34	2.64	7.115
160	C27	0.92		-3.181	2.912	0.23	2.76	7.108
161	C27	0.96		-3.337	3.024	0.12	2.88	7.101
162	C27	1.00		-3.416	3.136	0.0	2.98	
$\hat{D}_R = 5.5 \text{ 1/s}$								
163	C27	0.0	0.235	0.0	0.0	1.23	0.0	
164	C27	0.04		-0.769	0.154	1.23	0.004	5.67
165	C27	0.08		-2.219	0.769	1.23	0.01	5.65
166	C27	0.12		-3.70	1.542	1.23	0.02	5.60
167	C27	0.16		-5.09	2.46	1.23	0.03	5.52
168	C27	0.20		-6.94	4.01	1.22	0.05	5.31
169	C27	0.24		-8.94	5.70	1.22	0.07	5.20
170	C27	0.28		-11.11	7.40	1.22	0.09	5.17
171	C27	0.32		-31.42	9.25	1.21	0.11	5.13
172	C27	0.36		-15.73	11.72	1.21	0.15	5.09
173	C27	0.40		-18.05	13.88	1.20	0.18	5.04
174	C27	0.44		-20.36	15.80	1.19	0.22	4.99
175	C27	0.48		-22.83	17.89	1.18	0.28	4.93
176	C27	0.52		-25.30	19.59	1.17	0.34	4.87
177	C27	0.56		-27.77	21.29	1.15	0.43	4.82
178	C27	0.60		-30.55	23.14	1.13	0.59	4.76
179	C27	0.64		-32.40	24.62	1.09	0.78	4.71
180	C27	0.68		-33.94	26.23	1.05	1.02	4.72

Mess. Nr.	Fluid	Kanal- höhe y/Y	mittl. Geschw. $\bar{u}$ m/s	Interferenz- linienordnung N_1 N_2 $u/\bar{u}$ du/dy				opt. Konst. b
181	C27	0.72	0.235	-35.33	27.77	0.10	1.32	4.78
182	C27	0.76		-36.41	29.16	0.93	1.65	4.85
183	C27	0.80		-37.65	30.70	0.85	2.12	4.95
184	C27	0.84		-38.57	31.94	0.74	2.61	5.03
185	C27	0.88		-39.50	33.30	0.61	3.27	5.14
186	C27	0.92		-40.43	34.56	0.45	4.09	5.24
187	C27	0.96		-41.20	35.64	0.25	4.99	5.33
188	C27	1.0		-41.81	37.03	0.0	6.26	
							$\nu_{DR} = 5.5$	1/s

10.5 Ergebnisse der Viskositätsbestimmung

10.5.1 Messung des Druckabfalls in der 2-Plattenströmung (s.Kap.5.3)

Gleichungen: $\eta = \frac{\tau_W}{\epsilon}$ (5.3.1)

$$\tau_W = \Delta p \frac{b}{(l_1 - l_2)} \quad (5.3.6)$$

$$\epsilon_m = \frac{Q_G \cdot 3}{z b^2 2} \quad (5.3.4b)$$

$$\epsilon = \frac{2}{3} \epsilon_m + \frac{1}{3} \tau_W \frac{d\epsilon_m}{d\tau_W} \quad (5.3.3a)$$

Die Bestimmung von ϵ erfolgte durch graphische

Auswertung der Diagramme 34 bzw. 35.

Der Verlauf von η ist in Bild 27 graphisch dargestellt.

Mess. Nr.	Fluid	τ_w	ϵ_m	ϵ	η
			1/s	1/s	poise
47	C14	0.00581	1.636	1.478	0.00392
48	C14	0.00755	2.4	2.103	0.00358
49	C14	0.0223	4.036	4.185	0.00532
50	C14	0.026	5.89	5.668	0.00458
51	C14	0.0511	10.036	10.131	0.00504
52	C14	0.0791	15.49	15.837	0.00499
53	C14	0.1046	20.33	21.121	0.00495
54	C14	0.111	22.58	23.304	0.00476
55	C14	0.2308	57.81	65.543	0.00352
56	C14	0.3133	93.38	104.97	0.00298
57	C14	0.3947	124.36	140.796	0.00280
58	C14	0.4592	154.9	173.677	0.00264
59	C14	0.5284	187.2	208.28	0.00253
60	C14	0.5749	213.8	235.667	0.00244
61	C14	0.6418	250.9	274.447	0.00233
62	C14	0.7145	286.9	313.446	0.00228
63	C14	0.7656	320.72	347.18	0.0022
64	C14	0.6017	216.0	241.4	0.00248
65	C14	0.8482	328.8	366.2	0.00229
66	C14	1.05	463.6	501.21	0.00209
67	C14	1.36	634.9	676.3	0.00201
68	C27	0.27	0.436	0.435	0.6211
69	C27	0.302	0.633	0.5831	0.5179
71	C27	0.482	1.287	1.1167	0.4316
73	C27	0.767	2.4	2.2392	0.3425
75	C27	1.27	7.855	9.047	0.1404
76	C27	2.38	30.764	76.042	0.0312
77	C27	2.55	52.145	146.116	0.0175
78	C27	2.79	72.873	199.707	0.0139
79	C27	2.90	95.345	284.583	0.0117
80	C27	2.96	123.055	292.295	0.0101

Mess. Nr.	Fluid	τ_w	ϵ_m	ϵ	η
			1/s	1/s	poise
81	C27	3.08	156.218	365.945	0.0084
82	C27	3.25	190.255	427.381	0.0076
83	C27	3.95	414.545	710.863	0.0055
84	C27	4.12	470.182	778.567	0.0053

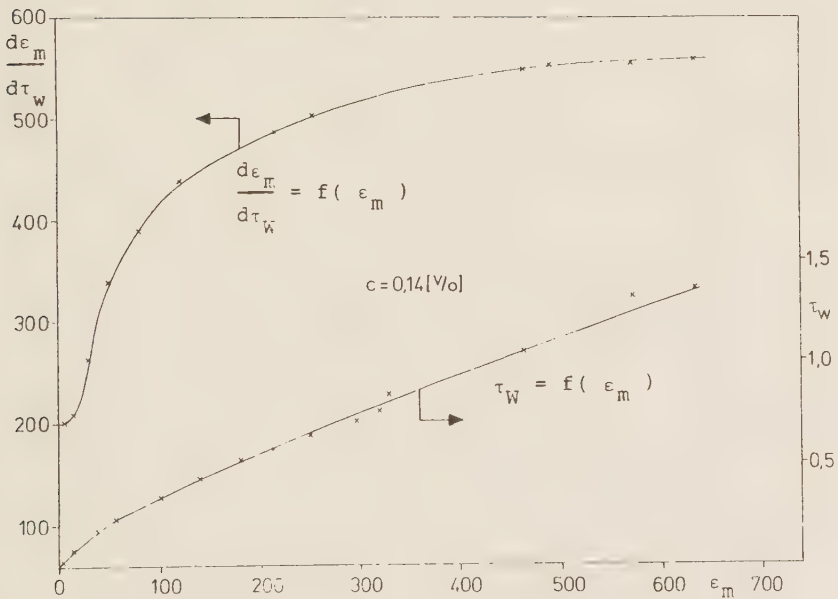


Bild 34: Verlauf der Wandschubspannung (Druckabfallmessung)
für $c = 0.14\%$

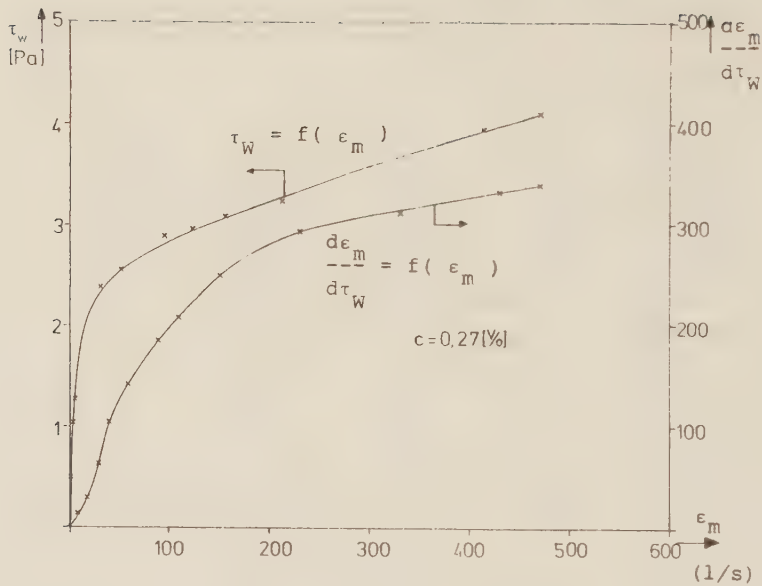


Bild 35: Verlauf der Wandschubspannung (Druckabfallmessung)
für $c = 0.27\%$

10.5.2 Messung der Interferenzlinien in der 2-Plattenströmung (s. Kap. 5.3)

Gleichungen: s. Kap. 10.5.1

$$\tau(y) = \left(\frac{y}{b} \right) \tau_w \quad (5.3.5)$$

$$\epsilon_m = \frac{Q(y)}{z} \frac{3}{2 y^2} \quad (5.3.4)$$

$$\epsilon = \frac{2}{3} \epsilon_m + \frac{1}{3} \tau(y) \frac{d \epsilon_m}{d \tau(y)} \quad (5.3.3b)$$

In den folgenden Tabellen sind Ergebnisse der Berechnungen
aufgeführt.

Der Verlauf von η ist in Bild 27 graphisch dargestellt.

Mess. Fluid du/dy τ ϵ_m ϵ η

Nr.

		1/s		1/s	1/s	poise
85	C14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
86	C14	0.13	0.00128	0.232	0.232	0.00551
87	C14	0.25	0.00256	0.396	0.373	0.00687
88	C14	0.34	0.00384	0.523	0.476	0.00807
89	C14	0.48	0.00512	0.676	0.654	0.00783
90	C14	0.61	0.0064	0.825	0.798	0.00802
91	C14	0.73	0.00768	0.972	0.943	0.00814
92	C14	0.84	0.00896	1.115	1.077	0.00832
93	C14	0.99	0.01024	1.273	1.269	0.00807
94	C14	1.11	0.0115	1.424	1.402	0.00822
95	C14	1.21	0.0128	1.570	1.536	0.00833
96	C14	1.34	0.01408	1.716	1.681	0.00837
97	C14	1.42	0.01536	1.851	1.773	0.00866
98	C14	1.53	0.01664	1.986	1.909	0.00872
99	C14	1.62	0.01792	2.115	2.014	0.00889
100	C14	1.74	0.01920	2.248	2.161	0.00888
101	C14	1.89	0.0205	2.388	2.341	0.00875
102	C14	2.03	0.0218	2.533	2.509	0.00867
103	C14	2.16	0.0230	2.681	2.671	0.00862
104	C14	2.27	0.0243	2.825	2.796	0.00869
105	C14	2.40	0.0256	2.970	2.950	0.00866
106	C14	2.54	0.0268	3.121	3.133	0.00858
107	C14	2.65	0.0282	3.268	3.254	0.00866
108	C14	2.75	0.0294	3.411	3.375	0.00872
109	C14	2.90	0.0307	3.559	3.559	0.00863
110	C14	3.06	0.0320	3.712	3.748	0.00854
111	C14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
112	C14	0.06	0.0312	5.197	5.197	0.00600
113	C14	0.14	0.0624	9.761	9.551	0.00653
114	C14	0.21	0.0936	13.655	12.997	0.00720
115	C14	0.29	0.1248	17.915	17.622	0.00708
116	C14	0.38	0.1560	22.422	22.461	0.00695
117	C14	0.46	0.1872	26.717	26.403	0.00709
118	C18	0.54	0.2184	31.051	30.810	0.00709

Mess. Nr.	Fluid	du/dy	τ	ϵ_m	ϵ	η
				1/s	1/s	poise
119	C14	0.63	0.2496	35.637	35.988	0.00694
120	C14	0.72	0.2808	40.289	40.817	0.00688
121	C14	0.80	0.3120	44.734	44.637	0.00699
122	C14	0.91	0.3432	49.611	50.959	0.00673
123	C14	0.99	0.3744	54.349	55.185	0.00678
124	C14	1.12	0.4056	59.544	62.208	0.00652
125	C14	1.09	0.4368	64.938	68.459	0.00638
126	C14	1.36	0.4680	70.585	75.293	0.00622
127	C14	1.50	0.4992	76.592	83.101	0.00601
128	C14	1.65	0.5304	82.975	91.484	0.00580
129	C14	1.81	0.5616	89.636	99.729	0.00563
130	C14	2.05	0.5928	97.273	113.21	0.00524
131	C14	2.24	0.624	105.2	123.4	0.00506
132	C14	2.45	0.6552	113.7	135.2	0.00485
133	C14	2.76	0.6864	123.4	153.0	0.00449
134	C14	3.27	0.7176	135.2	180.4	0.00398
135	C14	3.74	0.7488	148.5	206.1	0.00363
136	C14	4.44	0.7800	164.8	245.1	0.00318
137	C27	0.0	0.0	0.0	0.0	
138	C27	0.13	0.0114	0.071	0.071	0.16034
139	C27	0.23	0.0228	0.114	0.105	0.21750
140	C27	0.35	0.0342	0.157	0.148	0.23139
141	C27	0.46	0.0456	0.199	0.189	0.24014
142	C27	0.59	0.0570	0.243	0.236	0.24169
143	C27	0.71	0.0684	0.288	0.281	0.24367
144	C27	0.83	0.0798	0.333	0.327	0.24413
145	C27	0.95	0.0912	0.376	0.367	0.24879
146	C27	1.08	0.1026	0.421	0.415	0.24737
147	C27	1.21	0.1140	0.466	0.463	0.24609
148	C27	1.31	0.1254	0.510	0.499	0.25135
149	C27	1.43	0.1368	0.553	0.543	0.25181

Mess. Nr.	Fluid	du/dy	τ	ϵ_m	ϵ	η
				1/s	1/s	poise
150	C27	1.54	0.1482	0.596	0.584	0.25397
151	C27	1.66	0.1596	0.639	0.624	0.25573
152	C27	1.79	0.171	0.682	0.673	0.25415
153	C27	1.92	0.1824	0.727	0.722	0.25280
154	C27	2.03	0.1938	0.770	0.761	0.25495
155	C27	2.16	0.2052	0.815	0.809	0.25362
156	C27	2.31	0.2166	0.861	0.864	0.25064
157	C27	2.42	0.2280	0.906	0.905	0.25183
158	C27	2.53	0.2394	0.951	0.947	0.25294
159	C27	2.64	0.2508	0.995	0.986	0.25441
160	C27	2.76	0.2622	1.038	1.027	0.25518
161	C27	2.88	0.2736	1.082	1.073	0.25495
162	C27	2.98	0.2850	1.125	1.105	0.25789
163	C27	0.0	0.0	0.0	0.0	
164	C27	0.004	0.1229	0.285	0.285	0.43044
165	C27	0.01	0.2458	0.767	0.833	0.29513
166	C27	0.02	0.3686	1.255	1.324	0.27838
167	C27	0.03	0.4915	1.763	1.853	0.26531
168	C27	0.05	0.6144	2.450	2.778	0.22113
169	C27	0.07	0.7373	3.257	3.784	0.19482
170	C27	0.09	0.8602	4.141	4.823	0.17835
171	C27	0.11	0.9830	5.127	6.048	0.16254
172	C27	0.15	1.1059	6.282	7.654	0.14449
173	C27	0.18	1.2289	7.583	9.392	0.13083
174	C27	0.22	1.3516	9.036	11.353	0.11905
175	C27	0.28	1.4745	10.753	14.036	0.10505
176	C27	0.34	1.5974	12.767	17.240	0.09266
177	C27	0.43	1.7203	15.241	21.705	0.07925
178	C27	0.59	1.8432	18.649	29.474	0.06254
179	C27	0.78	1.9661	23.083	39.034	0.05037
180	C27	1.02	2.0889	28.698	50.949	0.04100

Mess. Nr.	Fluid	du/dy	τ	ϵ_m	ϵ	η
				1/s	1/s	poise
181	C27	1.32	2.2212	35.669	65.605	0.03371
182	C27	1.65	2.3347	43.916	81.510	0.02864
183	C27	2.12	2.4576	54.239	104.981	0.02341
184	C27	2.61	2.5805	66.286	128.518	0.02008
185	C27	3.27	2.7033	80.913	161.205	0.01677
186	C27	4.09	2.8262	98.552	200.940	0.01406
187	C27	4.99	2.9491	119.202	244.661	0.01205
188	C27	6.26	3.0720	14..459	306.783	0.01001

10.5.3 Viskosimetrische Messungen (s.Kap.5.3)

Meßgeräte: Rotationsviskosimeter

Typ: LS 100, LS 2 (LS= low shear)

Rota RV 2 MK 50/500 NV

In den folgenden Tabellen sind Ergebnisse des Rechnerprogramms aufgeführt.

Der Verlauf von η ist in Bild 27 graphisch dargestellt.

Mess. Nr.	Fluid	ϵ	η
		1/s	poise
189	C14	0.0624	0.0042
190	C14	0.0848	0.00438
191	C14	0.1153	0.00457
192	C14	0.1574	0.00458
193	C14	0.2123	0.00467

Mess. Nr.	Fluid	ϵ	η
		1/s	poise
194	C14	0.2898	0.00468
195	C14	0.3934	0.00473
196	C14	0.535	0.00478
197	C14	0.7277	0.00490
198	C14	0.9887	0.00490
199	C14	1.3506	0.00490
200	C14	1.8227	0.00480
201	C14	2.4784	0.00480
202	C14	3.3700	0.0047
203	C14	4.5895	0.0047
204	C14	0.9113	0.0046
205	C14	1.685	0.0052
206	C14	2.2948	0.0046
207	C14	3.1209	0.0047
208	C14	4.242	0.0046
209	C14	5.7631	0.0046
210	C14	7.8678	0.0045
211	C14	10.4898	0.0044
212	C14	19.6695	0.0042
213	C14	26.7505	0.0041
214	C14	36.3885	0.0039
215	C14	49.4360	0.0037
216	C14	67.5319	0.0034
217	C14	69.1353	0.0032
218	C14	123.9178	0.0030
219	C14	168.5020	0.0028
220	C14	489.605	0.0021
221	C14	692.48	0.002
222	C14	979.21	0.0021
223	C14	1384.95	0.0019
224	C14	1958.41	0.0018
225	C14	2769.91	0.0017
226	C14	3916.83	0.0017

Mess. Nr.	Fluid	ε	η
		1/s	poise
227	C27	0.00212	0.3208
228	C27	0.0029	0.3314
229	C27	0.0039	0.3327
230	C27	0.0053	0.3358
231	C27	0.0072	0.3362
232	C27	0.0098	0.3446
233	C27	0.0135	0.3383
234	C27	0.0182	0.342
235	C27	0.0247	0.3375
236	C27	0.0337	0.3355
237	C27	0.0459	0.329
238	C27	0.0624	0.3288
239	C27	0.0848	0.3263
240	C27	0.1152	0.3326
241	C27	0.1573	0.3322
242	C27	0.2124	0.3354
243	C27	0.0576	0.3081
244	C27	0.0786	0.3062
245	C27	0.1062	0.3227
246	C27	0.1449	0.3205
247	C27	0.1966	0.322
248	C27	0.2675	0.3296
249	C27	0.3638	0.3310
250	C27	0.4943	0.3354
251	C27	0.6753	0.3319
252	C27	0.9113	0.31
253	C27	1.2391	0.3232
254	C27	1.685	0.3206
255	C27	2.2947	0.313
256	C27	15.3103	0.0915
257	C27	21.64	0.0731
258	C27	30.62	0.0576
259	C27	43.28	0.0449

Mess. Nr.	Fluid	ϵ 1/s	η poise
260	C27	61.133	0.0348
261	C27	86.56	0.0277
262	C27	122.266	0.0218
263	C27	173.12	0.0175
264	C27	244.532	0.0139
265	C27	346.24	0.0111
266	C27	692.48	0.0071
267	C27	979.21	0.006
268	C27	1384.95	0.005
269	C27	1958.41	0.0043
270	C27	2769.91	0.0037

1. Literaturverzeichnis

- Bergmann, L.; Schäfer, C. 1975: Lehrbuch der Experimentalphysik III, Optik. Gryter Verlag Berlin
- Boeder, P. 1932: Über Strömungsdoppelbrechung, Z. Physik 75,258-278
- Burgers, J. M. 1938: Indroductory remarks on recent investigations concerning the structure of liquids, Verh. Kon. Ned. Akad. Wet., (1) 16,113
- Darby, R. 1976: Viscoelastic fluids, Marcel Dekker Inc., New York and Basel
- Einstein, A. 1906: Zur Theorie der Brownschen Bewegung Ann. d. Physik, 19, 371-381
- Eisenschitz, R. 1933: Der Einfluß der Brownschen Bewegung auf die Viskosität von Suspensionen.Z.S.f.physik.Chemie,163,133-141
- Haller, W. 1932: Orientierung und Deformierung disperser Teilchen in strömenden Flüssigkeiten, Kolloid-Zs. 61, 26
- Horsmann, M.; Merzkirch, W. 1981: Scatered light streaming birefringence in colloidal solutions. Rheol.Acta 20,501-510
- Horsmann, M.; Schmitz, E.; Merzkirch, W. 1979: T.Asanuma (ed.), Flow Visualization, 369, Hemisphere Publ.Corp.(Washington)
- Horsmann, M. 1979: Anwendung des Streulichtverfahrens in der Strömungsdoppelbrechung, Dissertation, Ruhr-Univerität Bochum
- Janeschitz-Kriegl, H. 1969: Flow birefringence of elasto-viscous polymer systems, 170-318, Adv.Polymer Sci.6
- Jeffery, G. B. 1915: Steady motion of a viscous fluid.Phil.Mag., Ser. 6,Bd.29,455ff
- Jerrard, H. G. 1959: Theories of streaming double refraction, Chemical reviews, 59,345-428
- Kuhn, W. 1933: Kolloid-ZS.62,269
- Kuske, A.; Robertson, G. 1974: Photoelastic Stess Analysis,London
- Langlois, W. E. 1964: Slow viscous flow, Macmillan Company, New York
- McAfee, W. J.; Pih H. 1974: Scattered light flow-optic relations adoptable to three-dimensional flow-birefringence.SESA fall meeting, Indianapolis, Ind., 16-19

- Merzkirch, W. 1974: Flow Visualization. Academic Press, New York
- Peebles, F. N.; Liu, K. C. 1965: Photoviscous analysis of twodimensional laminar flow in an expending jet, Exp.Mech.5,299
- Peterlin, A. 1938/39: Über die Viskosität von verdünnten Lösungen und Suspensionen in Abhängigkeit von der Teilchenform. ZS.f.Physik,111,232-263
- Peterlin, A. 1939: Bestimmung der Größe und des Achsenverhältnisses von ellipsoidförmigen starren Teilchen aus der inneren Reibung von verdünnten Suspensionen. Kolloid-ZS,86,2,230-241
- Peterlin, A.; Stuart, H. A. 1939: Zur Theorie der Strömungsdoppelbrechung von Kolloiden und großen Molekülen in Lösung. ZS.f.Physik,112,1-19
- Peterlin, A.; Stuart, H. A. 1939: Über die Bestimmung der Größe und Form, sowie der elektrischen, optischen und magnetischen Anisotropie von submikroskopischen Teilchen mit Hilfe der künstlichen Doppelbrechung und der inneren Reibung. ZS.f.Physik,11,129-147
- Peterlin, A.; Stuart, H. A. 1939: Über den Einfluß der Rotationsbehinderung und Anisotropie des inneren Feldes auf die Polarisation von Flüssigkeiten. ZS.f.Physik,113,663-696
- Pindera, J. T.; Krishnamurthy, A. R. 1978: Foundations of flow birefringence in some liquids. Exp. Mech. 18,1
- Rabinowitsch, B. 1929: Z.phys.Chem.145A,1
- Schmitz, E.; Merzkirch, W. 1983: Direct interferometric measurement of Streaming birefringence, Rheol.Acta 22,75-80
- Snellman, O.; Björnstal, Y. 1941: Einige Untersuchungen über Strömungsdoppelbrechung. Kolloid-Beihefte 52,403-472
- Swanson, M. M.; Green, R. L. 1969: Colloidal suspension propertries of Milling Yellow dye, J.Colloid.Interface Sci.29,161
- Wayland, H. 1964: Straming birefringence as a rheological research tool.J.Polymer Sc. C,5,11-36
- Wayland, H. 1960: Streaming birefringence of rigid macromolecules in general two-dimensional laminar flow.J.Chem.Phys. 33,3,769-773
- Wolf, H. 1961: Spannungsoptik. Springer, Berlin

12. Mathematischer Anhang

12.1 Lösung der Differentialgleichung der Teilchenrichtungsichte

$$\omega = - (k_1 + k_2) \sin^2 \phi - k_4 \sin (2 \phi) + k_2$$

$$\text{Abk.: } k_1 = du/dy \quad ; \quad k_2 = dv/dx \quad ; \quad k_4 = du/dx/2$$

Dgl. (allgemeine 2D-Strömung)

$$D \frac{\delta^2 \rho}{\delta \phi^2} - \frac{\delta}{\delta \phi} (\rho \omega) = 0$$

$$D \frac{\delta^2 \rho}{\delta \phi^2} + \frac{\delta \rho}{\delta \phi} [(\sin^2 \phi) (k_1 + k_2) + (\sin 2 \phi) k_4 - k_2] + \\ + \rho [2 (\sin \phi \cos \phi) (k_1 + k_2) + (\cos 2 \phi) k_4] = 0$$

$$\text{Abkürzung: } \alpha_1 = k_1 / D \quad ; \quad \alpha_2 = k_2 / D \quad ; \quad \alpha_3 = k_4 / D$$

$$\frac{\delta^2 \rho}{\delta \phi^2} + \frac{\delta \rho}{\delta \phi} [(\sin^2 \phi) (\alpha_1 + \alpha_2) + (\sin 2 \phi) \alpha_3 - \alpha_2] \\ + \rho [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin 2 \phi + \alpha_3 2 \cos 2 \phi] = 0$$

$$\frac{\delta^2 \rho}{\delta \phi^2} = \left(- \frac{\delta \rho}{\delta \phi} \right) [(\sin^2 \phi) (\alpha_1 + \alpha_2) + (\sin 2 \phi) \alpha_3 - \alpha_2] \\ - \rho [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin 2 \phi + \alpha_3 2 \cos 2 \phi]$$

Integration ergibt:

$$\frac{\delta \rho}{\delta \phi} + \rho [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin^2 \phi + \alpha_3 \sin (2 \phi) - \alpha_2] = C_1$$

$$\text{Dgl.: } (\rho' = \delta \rho / \delta \phi)$$

$$\rho' + \rho [(\alpha_1 + \alpha_2) \sin^2 \phi + \alpha_3 \sin (2 \phi) - \alpha_2] = C_1$$

1. Lösung der homogenen Dgl.

$$\frac{\rho'}{\rho} = - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin^2 \phi - \alpha_3 \sin 2 \phi + \alpha_2$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = - (\alpha_1 + \alpha_2) \sin^2 \phi d\phi - \alpha_3 (\sin 2 \phi) d\phi + \alpha_2 d\phi$$

$$\ln \rho = [-\phi/2 + (1/4) \sin 2 \phi] (\alpha_1 + \alpha_2) + (1/2) (\cos 2 \phi) \alpha_3 + \\ + \phi \alpha_2 + C_2$$

$$\ln \rho = \phi [(\alpha_1 + \alpha_2) (-1/2) + \alpha_2] + (\sin 2 \phi) ((\alpha_1 + \alpha_2)/4) + \\ + (\cos 2 \phi) (\alpha_3/2) + C_2$$

$$\rho(\phi) = C_3 \exp \left\{ \left[(\alpha_1 + \alpha_2)(-1/2) + \alpha_2 \right] \phi + \right. \\ \left. + ((\alpha_1 + \alpha_2)/4) \sin 2\phi + (\alpha_3/2) \cos 2\phi \right\}$$

2. Variation der Konstanten, inhomogene Dgl.

$$\text{Abk.: } b_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)/2 \quad ; \quad b_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)/4 \quad ; \quad b_3 = \alpha_3/2$$

$$\rho(\phi) = C_3(\phi) \exp \left[\phi b_1 + b_2 \sin 2\phi + b_3 \cos 2\phi \right]$$

$$\rho'(\phi) = C_3'(\phi) \exp [\dots] + C_3(\phi) \exp [\dots] \\ \left[(b_1 + b_2 \sin 2\phi + 2(-b_3) \cos 2\phi) \right]$$

eingesetzt in die Dgl. ergibt:

$$C_3'(\phi) \exp [\dots] + C_3(\phi) \exp [\dots] \left[b_1 + 2 b_2 \cos 2\phi - \right. \\ \left. 2 b_3 \sin 2\phi \right] + C_3(\phi)$$

$$\exp [\dots] \left[((\alpha_1 + \alpha_2)/2)(1 - \cos 2\phi) + \alpha_3 \sin 2\phi - \alpha_2 \right] = C_1 \\ (-b_1 - 2 b_2 \cos 2\phi + 2 b_3 \sin 2\phi)$$

$$C_3'(\phi) \exp [\dots] = C_1 \quad ; \quad C_3(\phi) = C_1 \int_{-\infty}^{\phi} \exp [\dots] d\phi$$

$$\text{eingesetzt erhält man: } \rho(\alpha_1, \phi) = C_1 \exp -[\dots] \int_{-\infty}^{\phi} \exp [\dots] d\phi$$

Bestimmung von C_1 :

Forderung 1: $\rho(\phi) = \rho(\phi \mp \pi)$ (Periodizität)

Forderung 2: Im Ruhezustand ist die Teilchenrichtungsichte $\rho = 1$.

Auch bei ungleichmäßiger Richtungsverteilung (Strömung) muß der

Wert $\rho = 1$ bei einem bestimmten ϕ_1 - Wert auftreten.

$$\rho(\phi_1) = \rho(\phi_1 \mp \pi) = 1 \quad (\text{Bed.: } \delta\rho/\delta\phi > 0)$$

$$1 = C_1 \exp -[\dots] \int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp [\dots] d\phi + C_1 = \exp [\dots] \int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp [\dots] d\phi$$

$$\exp [b_1 (\phi_1 + \pi) + b_2 \sin (2 \phi_1 + 2 \pi) + b_3 \cos (2 \phi_1 + 2 \pi)]$$

$$1 = \frac{\exp [b_1 (\phi_1 + \pi) + b_2 \sin (2 \phi_1 + 2 \pi) + b_3 \cos (2 \phi_1 + 2 \pi)]}{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp -[\dots] d\phi}$$

$$\exp [b_1 \phi_1 + b_2 \sin 2 \phi_1 + b_3 \cos 2 \phi_1]$$

$$\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp -[\dots] d\phi$$

$$\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp -[\dots] d\phi$$

$$\int_{\phi_1}^{\phi_1 + \pi} \exp -[\dots] d\phi$$

$$1 = \exp [b_1 \pi] \left[1 + \frac{\int_{\phi_1}^{\phi_1 + \pi} \exp -[\dots] d\phi}{\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp -[\dots] d\phi} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp -[\dots] d\phi$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}{\exp [\dots]} = (\exp [-b_1 \pi] - 1) \frac{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots}{\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}$$

$$\rho(\phi) = \frac{\exp [\dots]}{\exp [\dots]} \{ \exp [-b_1 \pi] - 1 \} \frac{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots}{\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}$$

Stelle: $\phi = \phi_1$

$$1 = \{ \exp [-b_1 \pi] - 1 \} \frac{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots}{\int_{-\infty}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}$$

$$\int_{-\infty}^{\phi_1} = \int_{-\infty}^{\phi} - \int_{\phi}^{\phi_1}$$

$$1 = \{ \exp [-\phi_1 \pi] - 1 \} \frac{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots}{\int_{-\infty}^{\phi} \exp \{ - [\dots] \} - \int_{\phi}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}$$

$$[\exp (-b_1 \pi) - 1] \frac{\int_{-\infty}^{\phi} \exp - [\dots] \dots}{\int_{-\infty}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots} =$$

$$\left[\frac{1 + [\exp - (b_1 \pi) - 1] \int_{\phi}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}{\int_{\phi_1}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots} \right]$$

eingesetzt:

$$\rho(\alpha_1, \phi) = \frac{\exp [\dots]}{\exp [\dots]} \{ 1 + [\exp (-b_1 \pi) - 1] \frac{\int_{\phi}^{\phi_1} \exp - [\dots] \dots}{\int_{\phi_1}^{\phi_1 + \pi} \exp - [\dots] \dots} \}$$

$$[\dots] = [\phi \quad b_1 + b_2 \sin 2 \phi + b_3 \cos 2 \phi]$$

$$b_1 = (1/2) (\alpha_2 - \alpha_1) ; b_2 = (1/4) (\alpha_1 + \alpha_2) ; b_3 = (\alpha_3/2)$$

$$\alpha_1 = (du/dy)/D ; \alpha_2 = (dv/dx)/D ; \alpha_3 = (du/dx)/(2D)$$

(Teilchenrichtungsichte im 2D - Scherfeld) .

12.2 Polarisierungstheoretische Behandlung des Verteilungsproblems

Abkürzungen:

p : Elektrisches Moment

E : Feldstärke des Lichtvektors

E' : "Innere", am Ort des Teilchens wirkende Feldstärke

C : Tensor der "Polarisierbarkeit" des Teilchens

Der Nullpunkt eines festen Koordinatensystems xyz sei der Mittelpunkt des Teilchens. Es gilt: $p = C E'$

Liegt das Teilchen mit seiner Längsachse parallel zur z -Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems und ist der Polarisierbarkeitstensor rotationssymmetrisch, so wird:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

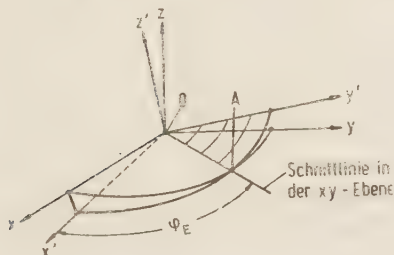


Abb. 34 Eulersche Winkelbeziehungen

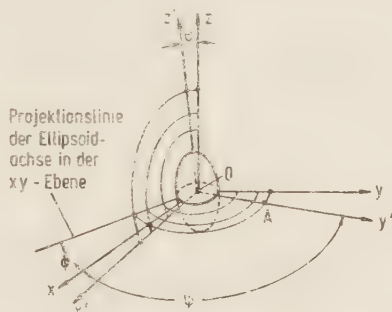


Abb. 33 Winkelbeziehungen des polarisationsoptischen Problems

Die Größe C wird nun für ein Teilchen bestimmt, das eine ganz beliebige Lage ϕ, θ (Abb. 33) zu dem festen Koordinatensystem hat. Dazu wird der Tensor C durch eine Transformation übergeführt in den Tensor $C(\phi, \theta)$. Eine beliebige räumliche Teilchenlage erhält man durch die Drehung der Teilchenlängsachse des ebenen Problems in Richtung der z -Achse, gekennzeichnet durch den Winkel θ . Der neuen Lage des Teilchens möge ein Koordinatensystem $x'y'z'$ entsprechen, welches durch eine orthogonale Transformation aus xyz hervorgeht. Die Transformation soll mit Hilfe der Eulerschen Winkelbeziehungen erfolgen. Für das hier behandelte Rotationsellipsoid bringt die Drehung um die z' -Achse, die in den Eulerschen Winkelbeziehungen durch θ beschrieben wird, keine Änderungen der Tensorkomponenten. Man führt diese Drehung daher nicht aus. Damit erhält man einen Spezialfall der Eulerschen Beziehungen, bei dem die Achse y' in der Abbildung 34 mit der Richtung von $\overline{OA}$ zusammenfällt. Somit ist $\theta = 90^\circ$. Man schafft den folgenden Übergang vom xyz - zum $x'y'z'$ -System:

1. Drehung um die z-Achse um den Winkel ϕ in die Lage y' .

2. Drehung um die y' -Achse um den Winkel θ in die Lage $z'x'$.

Esgilt die Beziehung:

$$\phi + \psi = 90^\circ$$

$$\phi = 90^\circ - \psi$$

$$\cos \phi = \cos (90^\circ - \psi) = \sin \psi$$

$$\sin \phi = \sin (90^\circ - \psi) = \cos \psi$$

Um die Eulerschen Winkelbeziehungen benutzen zu können, müssen also folgende Änderungen angegeben werden:

a) $\varepsilon_1 = 90^\circ$ $\cos \varepsilon_1 = 0$; $\sin \varepsilon_1 = 1$.

b) $\phi = 90^\circ - \psi$ $\sin \psi = \cos \phi$; $\cos \psi = \sin \phi$

Es gelten die folgenden Zusammenhänge (Bronstein S.187):

Alte Achsen	Richtungskosinus der neuen Achsen		
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Mit den nachfolgenden reduzierten Abkürzungen erhält man aus a) und b) :

$$\cos \theta = h_1 \quad \sin \phi = h_2 \quad \cos \varepsilon_1 = h_3 = 0$$

$$\sin \theta = s_1 \quad \cos \phi = s_2 \quad \sin \varepsilon_1 = s_3 = 1$$

Dann ist:

$$l_1 = h_2 h_3 - h_1 s_2 s_3 = -\cos \theta \cos \phi$$

$$m_1 = s_2 h_3 + h_1 h_2 s_3 = \cos \theta \sin \phi$$

$$n_1 = s_1 s_3 = \sin \theta$$

$$l_2 = -h_2 s_3 - h_1 s_2 h_3 = -\sin \phi$$

$$m_2 = -s_2 s_3 + h_1 h_2 h_3 = -\cos \phi$$

$$n_2 = s_1 h_3 = 0$$

$$l_3 = s_1 s_2 = \sin \theta \cos \phi$$

$$m_3 = -s_1 h_2 = -\sin \theta \sin \phi$$

$$n_3 = h_1 = \cos \theta$$

Die Transformationsdeterminante des $x'y'z'$ -Systems lautet also:

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1,2,3; \\ k=1,2,3 \end{matrix}$$

Für die Transformationsformeln der Maßzahlen eines Tensors gilt (Joos/Richter, S.228):

$$G_{lk}' = \sum_{i,j=1}^3 g_{il} g_{jk} C_{ij}$$

$$G_{lk}' = C(x', y', z')$$

$$C_{ij} = c(x, y, z)$$

d.h.

$$G_{11}' = \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{i1} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{21} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{31} C_{i3}$$

$$\begin{aligned} &= g_{11} g_{11} C_{11} + g_{21} g_{11} \cancel{C_{21}} + g_{31} g_{11} \cancel{C_{31}} + \\ &\quad g_{11} g_{22} \cancel{C_{12}} + g_{21} g_{21} C_{22} + g_{31} g_{21} \cancel{C_{32}} + \\ &\quad g_{11} g_{31} \cancel{C_{13}} + g_{21} g_{31} \cancel{C_{23}} + g_{31} g_{31} C_{33} \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \theta \cos^2 \phi c_1 + \sin^2 \phi c_1 + \sin^2 \theta \cos^2 \phi c_2$$

$$G_{11}' = c_1 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) + (\cos^2 \phi \sin^2 \theta) c_2$$

$$G_{12}' = \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{i2} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{22} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{32} C_{i3}$$

$$\begin{aligned} &= g_{11} g_{12} C_{11} + g_{21} g_{12} \cancel{C_{21}} + g_{31} g_{12} \cancel{C_{31}} + \\ &\quad g_{11} g_{22} \cancel{C_{12}} + g_{21} g_{22} C_{22} + g_{31} g_{22} \cancel{C_{32}} + \\ &\quad g_{11} g_{32} \cancel{C_{13}} + g_{21} g_{32} \cancel{C_{23}} + g_{31} g_{32} C_{33} \end{aligned}$$

$$G_{12}' = (-\cos \theta \cos \phi) \cos \theta \sin \phi c_1 + (-\sin \phi)(-\cos \phi) c_1 + \\ + \sin \theta \cos \phi (-\sin \theta \sin \phi) c_2$$

$$G_{12}' = \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta (c_1 - c_2)$$

$$G_{13}' = \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{i3} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{i23} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i1} g_{i33} C_{i3}$$

$$= g_{11} g_{13} C_{11} + g_{21} g_{13} \cancel{C_{21}} + g_{31} g_{13} \cancel{C_{31}} + \\ g_{11} g_{23} \cancel{C_{12}} + g_{21} g_{23} C_{22} + g_{31} g_{23} \cancel{C_{32}} + \\ g_{11} g_{33} \cancel{C_{13}} + g_{21} g_{33} \cancel{C_{23}} + g_{31} g_{33} C_{33}$$

$$= (-\cos \theta \cos \phi) \sin \theta c_1 + (-\sin \phi) \cdot 0 + \sin \theta \cos \phi \cos \theta c_2$$

$$G_{13}' = \cos \phi \sin \theta \cos \theta (c_2 - c_1)$$

$$G_{21}' = \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i1} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i21} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i31} C_{i3}$$

$$= g_{12} g_{11} C_{11} + g_{22} g_{11} \cancel{C_{21}} + g_{32} g_{11} \cancel{C_{31}} + \\ g_{12} g_{21} \cancel{C_{12}} + g_{22} g_{21} C_{22} + g_{32} g_{21} \cancel{C_{32}} + \\ g_{12} g_{31} \cancel{C_{13}} + g_{22} g_{31} \cancel{C_{23}} + g_{32} g_{31} C_{33}$$

$$= \cos \theta \sin \phi (-\cos \theta \cos \phi) c_1 + (-\cos \phi)(-\sin \phi) c_1 + \\ (-\sin \phi \sin \theta) \sin \theta \cos \phi c_2$$

$$= \sin \phi \cos \phi \underbrace{(-\cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta - 1} c_1 + \sin \phi \cos \phi c_1 + \\ \sin \phi \cos \phi (-\sin^2 \theta) c_2$$

$$= \sin \phi \cos \phi (\sin^2 \theta c_1 - \cancel{c_1} + \cancel{c_1} - \sin^2 \theta c_2)$$

$$G_{21}' = \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta (c_1 - c_2)$$

$$\begin{aligned}
 G_{22}' &= \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i2} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i2} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i2} C_{i3} \\
 &= g_{12} g_{12} C_{11} + g_{22} g_{12} \cancel{C_{21}} + g_{32} g_{12} \cancel{C_{31}} + \\
 &\quad g_{12} g_{22} \cancel{C_{12}} + g_{22} g_{22} C_{22} + g_{32} g_{22} \cancel{C_{32}} + \\
 &\quad g_{12} g_{32} \cancel{C_{13}} + g_{22} g_{32} \cancel{C_{23}} + g_{32} g_{32} C_{33} \\
 &= \cos^2 \theta \sin^2 \phi \, c_1 + \cos^2 \phi \, c_1 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \, c_2
 \end{aligned}$$

$$G_{22}' = c_1 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + c_2 (\sin^2 \phi \sin^2 \theta)$$

$$\begin{aligned}
 G_{23}' &= \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i3} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i3} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i2} g_{i3} C_{i3} \\
 &= g_{12} g_{13} C_{11} + g_{22} g_{13} \cancel{C_{22}} + g_{32} g_{13} \cancel{C_{31}} + \\
 &\quad g_{12} g_{23} \cancel{C_{12}} + g_{22} g_{23} C_{22} + g_{32} g_{23} \cancel{C_{32}} + \\
 &\quad g_{12} g_{33} \cancel{C_{13}} + g_{22} g_{33} \cancel{C_{23}} + g_{32} g_{33} C_{33} \\
 &= \cos \theta \sin \phi \sin \theta \, c_1 + (-\cos \phi) \, 0 + (-\sin \theta) \sin \phi \cos \theta \, c_2
 \end{aligned}$$

$$G_{23}' = \sin \phi \sin \theta \cos \theta (c_1 - c_2)$$

$$\begin{aligned}
 G_{31}' &= \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i1} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i1} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i1} C_{i3} \\
 &= g_{13} g_{11} C_{11} + g_{23} g_{11} \cancel{C_{21}} + g_{33} g_{11} \cancel{C_{31}} + \\
 &\quad g_{13} g_{21} \cancel{C_{12}} + g_{23} g_{21} C_{22} + g_{33} g_{21} \cancel{C_{32}} + \\
 &\quad g_{13} g_{31} \cancel{C_{13}} + g_{23} g_{31} \cancel{C_{23}} + g_{33} g_{31} C_{33} \\
 &= (\sin \theta (-\cos \theta) \cos \phi) c_1 + 0 + \cos \theta \sin \theta \cos \phi \, c_2
 \end{aligned}$$

$$G_{31}' = \cos \phi \sin \theta \cos \theta (c_2 - c_1)$$

$$G_{32}' = \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i2} C_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i2} C_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i2} C_{i3}$$

$$\begin{aligned}
 &= g_{13} g_{12} c_{11} + g_{23} g_{12} \cancel{c_{21}} + g_{33} g_{12} \cancel{c_{31}} + \\
 &\quad g_{13} g_{22} \cancel{c_{12}} + g_{23} g_{22} c_{22} + g_{33} g_{22} \cancel{c_{32}} + \\
 &\quad g_{13} g_{32} \cancel{c_{13}} + g_{23} g_{32} \cancel{c_{23}} + g_{33} g_{32} c_{33}
 \end{aligned}$$

$$= \sin \theta \cos \theta \sin \phi c_1 + 0 + \cos \theta (-\sin \theta) \sin \phi c_2$$

$$G_{32}' = \sin \phi \sin \theta \cos \theta (c_1 - c_2)$$

$$G_{33}' = \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{i3} c_{i1} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{23} c_{i2} + \sum_{i=1}^3 g_{i3} g_{33} c_{i3}$$

$$\begin{aligned}
 &= g_{13} g_{13} c_{11} + 0 + 0 + 0 + g_{23} g_{23} c_{22} + 0 + 0 + 0 + \\
 &\quad g_{33} g_{33} c_{33}
 \end{aligned}$$

$$G_{33}' = \sin^2 \theta c_1 + \cos^2 \theta c_2$$

$$\begin{aligned}
 G_{1k}' = & \left[\begin{aligned}
 &c_1 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) + c_2 (\cos^2 \phi \sin^2 \theta), \\
 &(c_1 - c_2) \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta , \\
 &\quad (c_2 - c_1) \cos \phi \sin \theta \cos \theta \\
 &(c_1 - c_2) \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta , c_1 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\
 &\quad \cos^2 \theta) + c_2 (\sin^2 \phi \sin^2 \theta), \\
 &\quad (c_1 - c_2) \sin \phi \sin \theta \cos \theta \\
 &(c_2 - c_1) \cos \phi \sin \theta \cos \theta , (c_1 - c_2) \sin \phi \\
 &\quad \sin \theta \cos \theta , \\
 &\quad \sin^2 \theta \cdot c_1 + \cos^2 \theta \cdot c_2
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Die Betrachtung für den Volumenbereich erfordert die Summation aller C_{ik} , die richtungsabhängig sind, für den Raumwinkel multipliziert mit der Raumdichte.

$$\gamma_{ik} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) c_{ik}(\phi, \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (i, k=1, 2, 3)$$

Vorraussetzung ist, daß die zeitlich gemittelte Raumdichte ρ des Winkels willkürlich gleich 1 gesetzt wird auf Grund der Vorraussetzung, daß nur der reine Farbstoff betrachtet wird. Es ist also:

$$\Sigma \text{ Teilchendichten in } \theta = \int_0^{\pi} \rho(\theta) \, d\theta = \pi$$

$$\rho(\theta) = \pi / \int_0^{\pi} d\theta = \pi / \pi = 1$$

$$\rho(\theta) = 1 = \text{konst.}$$

Es folgt die Bestimmung von γ_{11} . (Bei der Integration über θ kann ρ vorraussetzungsgemäß als Konstante behandelt werden.)

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) C_{11}' \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) \{ c_1 \sin^2 \phi + c_1 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \\ &\quad c_2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) c_1 \sin^2 \phi \sin \theta \, d\theta \, d\phi + \\ &\quad \rho(\phi, \theta) c_1 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi + \\ &\quad \rho(\phi, \theta) c_2 \cos^2 \phi \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) \sin^2 \phi \sin \theta \, d\theta \, d\phi + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) c_1 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) c_2 \cos^2 \phi \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) \sin \theta \, d\theta \right\} \sin^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right\} \cos^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \rho(\phi, \theta) \sin^3 \theta \, d\theta \right\} \cos^2 \phi \, d\phi
 \end{aligned}$$

Mit

$$\rho(\phi, \theta) = \rho(\theta) \rho(\phi) = 1 \cdot (\phi) \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \left\{ \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right\} \sin^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \left\{ \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \right\} \cos^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_2 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \left\{ \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta \right\} \cos^2 \phi \, d\phi \\
 &= c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) (-1) \left| \cos \theta \right|_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) (-1/3) \left| \cos^3 \theta \right|_0^{\pi} \cos^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad c_2 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \left\{ (-1) \left| \cos \theta \right|_0^{\pi} + (1/3) \left| \cos^3 \theta \right|_0^{\pi} \right\} \\
 &\quad \cos^2 \phi \, d\phi \\
 &= c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) (-1) (-2) \sin^2 \phi \, d\phi + c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) (-1/3) (-2) \\
 &\quad \cos^2 \phi \, d\phi + c_2 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \{ (-1) (-2) + (1/3) (-2) \} \\
 &\quad \cos^2 \phi \, d\phi \\
 &= 2c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \sin^2 \phi \, d\phi + (2/3)c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi + \\
 &\quad (4/3)c_2 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi
 \end{aligned}$$

Mit $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= 2c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \, d\phi - 2c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi + (2/3)c_1 \\
 &\quad \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi + (4/3)c_2 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \, d\phi
 \end{aligned}$$

$$= 2c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \partial\phi + \{(2/3)c_1 - 2c_1 + (4/3)c_2\} \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos^2 \phi \partial\phi$$

Mit $\cos^2 \phi = (1/2)(1 + \cos 2\phi)$ folgt für den zweiten Term:

$$\gamma_{11} = 2c_1 \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \partial\phi + (4/3)(c_2 - c_1)(1/2) \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \partial\phi +$$

$$(4/3)(c_2 - c_1)(1/2) \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos 2\phi \partial\phi$$

$$= 2c_1 2\pi + (4/3)(c_2 - c_1)(1/2) 2\pi + (2/3)(c_2 - c_1)$$

$$\int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos 2\phi \partial\phi$$

$$= 4c_1 \pi + (4/3)(c_2 - c_1) \pi + \dots$$

$$= \pi (8/3)c_1 + (4/3)c_2 \pi + \dots$$

$$\gamma_{11} = \pi (4/3)(2c_1 + c_2) - (2/3)(c_1 - c_2) \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos 2\phi \partial\phi$$

$$\gamma_{11} = k_1 - k_2 A$$

$$k_1 = (4/3)(2c_1 + c_2) \pi$$

$$k_2 = (2/3)(c_1 - c_2)$$

$$A = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos 2\phi \partial\phi$$

$$\gamma_{12} = k_2 B$$

$$B = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \sin 2\phi \partial\phi$$

Der Tensor γ_{ik} nimmt die Form an:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

Die Tensorbeziehung für γ_{ik} lautet:

$$P = \gamma E' \quad (P=\text{elektr. Polarisierung pro Volumeneinheit})$$

Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$E' = E + (4\pi/3) P \quad (E=\text{elektr. Feldstärke des Störfeldes bzw. des Lichtes})$$

eingesetzt ist dann

$$P = \gamma E + (4\pi/3) \gamma P$$

Andererseits gilt die Beziehung:

$$D = E + 4\pi P = \epsilon E \quad (D=\text{dielektr. Verschiebung; } \epsilon=\text{Dielektrizitätstensor})$$

Der Tensor ϵ soll durch den Tensor γ ausgedrückt werden, um dann mit Hilfe von ϵ Aussagen über den Brechungsindex n_i zu machen. Verwendet wird die vorletzte Gleichung, man erhält:

$$\{(4\pi/3)\gamma - I\} P = \gamma E \quad (I=\text{Einheitsmatrix})$$

$$P = -\{(4\pi/3)\gamma - I\}^{-1} \gamma E$$

eingesetzt in

$$D = E - 4\pi \{(4\pi/3)\gamma - I\}^{-1} \gamma E$$

$$D = \{I - 4\pi \{(4\pi/3)\gamma - I\}^{-1} \gamma\} E = \epsilon E$$

$$\epsilon = I - 4\pi \{(4\pi/3)\gamma - I\}^{-1} \gamma$$

$$\epsilon = I - 4\pi \underbrace{a^{-1}}_c \gamma$$

Bestimmt wird nun der Ausdruck $a^{-1} \gamma$.

In Tensorschreibweise gilt:

$$a^{-1} \gamma = c = I c = a^{-1} a c ; \quad \gamma = a c$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} & \{(4\pi/3)\gamma_{12}\} & 0 \\ (4\pi/3)\gamma_{21} & \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} & 0 \\ 0 & 0 & \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Bestimmung von C :

Die Multiplikationsregel für eine Matrix lautet:

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} , \quad \text{also}$$

$$(1) \quad \gamma_{11} = \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}c_{11} + (4\pi/3)\gamma_{12}c_{21}$$

$$(2) \quad \gamma_{12} = \{(4\pi/3)\gamma_{12}-1\}c_{12} + (4\pi/3)\gamma_{12}c_{22}$$

$$(3) \quad \gamma_{21} = (4\pi/3)\gamma_{21}c_{11} + \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}c_{21}$$

$$(4) \quad \gamma_{22} = (4\pi/3)\gamma_{21}c_{12} + \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}c_{22}$$

$$(5) \quad \gamma_{33} = 0 + 0 + \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}c_{33}$$

Aus den übrigen Gleichungen folgt mit Ausnahme von c_{33} :

$$c_{31} = c_{32} = c_{13} = c_{23} = 0$$

$$\gamma_{31}: 0 + 0 + \{(4\pi/3)\gamma_{33} - 1\} C_{31} = 0 \rightarrow C_{31} = 0$$

$$\gamma_{32}: 0 + 0 + \{(4\pi/3)\gamma_{33} - 1\} C_{32} = 0 \rightarrow C_{32} = 0$$

$$\gamma_{13}: \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} C_{13} + (4\pi/3)\gamma_{12} C_{23}$$

$$\gamma_{23}: (4\pi/3)\gamma_{21} C_{13} + \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} C_{23}$$

$$C_{23} = \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} / \{(-4\pi/3)\gamma_{12}-1\} C_{13}$$

$$C_{23} = \{(4\pi/3)\gamma_{21}\} / \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} (-1) C_{13}$$

Wegen $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ folgt nach dem Gleichsetzen:

$$\frac{\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}}{(4\pi/3)\gamma_{12}} C_{13} = \frac{(4\pi/3)\gamma_{12}}{\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}} C_{13}$$

$$C_{13} \frac{\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}}{(4\pi/3)\gamma_{12}} - \frac{(4\pi/3)\gamma_{12}}{\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}} = 0$$

$$C_{13} \frac{\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} - \{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2}{(4\pi/3)\gamma_{12} (4\pi/3) (\gamma_{22}-1)} = 0$$

Unter der Voraussetzung, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer ungleich Null ist, wird $C_{13} = 0$ und dann auch aus den vorhergehenden Beziehungen $C_{23} = 0$. Die Werte C aus den Gleichungen (1) - (5) werden nun mit Hilfe der Determinante bestimmt.

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{33}	y_i
	$(4\pi/3)\gamma_{11}-1$	$(4\pi/3)\gamma_{12}$	0	0	0	γ_{11}
$A_{ij}:$	0	$(4\pi/3)\gamma_{11}-1$	0	$(4\pi/3)\gamma_{12}$	0	$= \gamma_{12}$
	$(4\pi/3)\gamma_{12}$	0	$(4\pi/3)\gamma_{22}-1$	0	0	γ_{12}
	0	$(4\pi/3)\gamma_{12}$	0	$(4\pi/3)\gamma_{22}-1$	0	γ_{22}
	0	0	0	0	$(4\pi/3)\gamma_{33}-1$	γ_{33}

$$D = \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\} - \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{12}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{12}-1\} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}.$$

$$D = \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}$$

Es gilt: $X_j = \{\sum_{i=1}^n \gamma_{1i} A_{ij}\} / D$

$$X_{11} = \{\gamma_{11} A_{11} + \gamma_{12} A_{21} + \gamma_{13} A_{31} + \gamma_{22} A_{41} + \gamma_{23} A_{51}\} / D$$

$$A_{11} = \{-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\} - \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{12}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}$$

$$A_{21} = \{-1\}^3 \{(4\pi/3)\gamma_{12}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}$$

$$A_{31} = \{-1\}^4 \quad 0 = 0$$

$$A_{41} = \{-1\}^5 \{-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2 = 0$$

$$A_{51} = \{-1\}^6 \cdot 0 = 0$$

$$X_{11} = \{\gamma_{11} \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} - \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}^2 + \{-1\}\gamma_{12} \{(4\pi/3)\gamma_{12} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2 - \{-1\}^5 \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2\} / D$$

$$X_{11} = \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} \{\gamma_{11} \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} - \\ \gamma_{11} \{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2 - (4\pi/3)\gamma_{12}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} + \\ \gamma_{22} \{(4\pi/3)\gamma_{12}\}^2\} / D$$

$$X_{11} = \{\gamma_{11} \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} - (4\pi/3)\gamma_{12}^2\} / \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} \\ \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2$$

$$X_{12} = \{\gamma_{11} A_{12} + \gamma_{12} A_{22} + \gamma_{12} A_{32} + \gamma_{22} A_{42} + \gamma_{33} A_{52}\} / D$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 0$$

$$A_{22} = (-1)^4 \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}^2 \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot 0$$

$$A_{42} = (-1)^6 (-1) \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} (4\pi/3)\gamma_{12} \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\} \cdot 0$$

$$A_{52} = 0$$

$$X_{12} = \{\gamma_{12} \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} (4\pi/3) \gamma_{22} \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} (4\pi/3)\gamma_{12}\} / D$$

$$X_{12} = \gamma_{12} (+1) / \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}$$

$$X_{22} = \{\gamma_{11} A_{14} + \gamma_{12} A_{24} + \gamma_{21} A_{34} + \gamma_{22} A_{44}\} / D$$

$$A_{14} = 0$$

$$A_{24} = (-1)^6 (-1) (4\pi/3)\gamma_{12} \{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}$$

$$A_{34} = (-1)^7 \cdot 0$$

$$A_{44} = (-1)^8 \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}$$

$$A_{54} = 0$$

$$X_{22} = \{[(4\pi/3)\gamma_{11}-1]\{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}\gamma_{22} + (-1)\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\} (4\pi/3)\gamma_{12}^2\} / D$$

$$X_{22} = \{(4\pi/3)(\gamma_{11}-1) - (4\pi/3)\gamma_{12}^2\} / \{(4\pi/3)\gamma_{11}-1\}\{(4\pi/3)\gamma_{22}-1\}$$

Für X_{33} erhält man nach einer entsprechenden Rechnung

$$X_{33} = \gamma_{33} / \{(4\pi/3)\gamma_{33}-1\}$$

Wegen der Symmetrie des Tensor ist $X_{12} = X_{21}$. Man erhält somit den Dielektrizitätstensor:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 - (4\pi/F) \{ \gamma_{11} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \} - (4\pi/3) \gamma_{12}^2 \}, & (-4\pi/F) \gamma_{12} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \}, & 0 \\ (-4\pi/F) \gamma_{12} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \}, & 1 - (4\pi/F) \{ \gamma_{22} \{ (4\pi/3) \gamma_{11}^{-1} \} - (4\pi/3) \gamma_{12}^2 \}, & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (4\pi) \gamma_{33} / \{ (4\pi/3) \gamma_{33}^{-1} \} \end{bmatrix}$$

wobei $F = \{ (4\pi/3) \gamma_{11}^{-1} \} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \} - \{ (4\pi/3) \gamma_{12}^2 \}$ ist.

Der Tensor ϵ ist auf das feststehende xyz - Koordinatensystem bezogen. Durch eine Transformation nach $x''y''z''$, dem eine Drehung um die z - Achse um den Winkel χ der Teilchenausrichtung entspricht, bringt man den Tensor auf die Hauptachsen. Der Transformations-tensor d und der Dielektrizitätstensor lauten:

$$\epsilon = d \epsilon_1$$

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für die einzelnen Werte gilt:

$$\tan 2\chi = (2 \epsilon_{12}) / (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})$$

Es wurden bestimmt:

$$\epsilon_{11} = k_1 - k_2 A$$

$$\epsilon_{22} = k_1 + k_2 A$$

$$\epsilon_{12} = \pm k_2 B$$

$$\epsilon_{21} = \epsilon_{12}$$

$$\epsilon_{33} = k_1$$

$$k_1 = (4\pi/3) (2c_1 + c_2)$$

$$k_2 = (2/3) (c_1 - c_2)$$

$$A = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \cos 2\phi \, d\phi$$

$$B = \int_0^{2\pi} \rho(\phi) \sin 2\phi \, d\phi$$

Tensorabkürzungen: $\epsilon = A_{rs}$, $\epsilon_1 = A'_{rs}$

$$A_{rs} = \sum_{l,k=1}^3 d_{rl} d_{sk} A_{lk}$$

$$A_{rs} = \sum_{l=1}^3 d_{rl} d_{s1} A_{11} + \sum_{l=1}^3 d_{rl} d_{s2} A_{12} + \sum_{l=1}^3 d_{rl} d_{s3} A_{13}$$

$$\begin{aligned} A_{11} = & d_{11} d_{11} A_{11} + d_{12} d_{11} A_{21} + d_{13} d_{11} A_{31} + \\ & d_{11} d_{12} A_{12} + d_{12} d_{12} A_{22} + d_{13} d_{12} A_{32} + \\ & d_{11} d_{13} A_{13} + d_{12} d_{13} A_{23} + d_{13} d_{13} A_{33} \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \chi \quad \epsilon_{11} + \sin \chi \cos \chi \quad \epsilon_{12} + 0 + \cos \chi \sin \chi \quad \epsilon_{12} + \\ \sin^2 \chi \quad \epsilon_{22} + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$A_{11} = \cos^2 \chi \quad \epsilon_{11} + \epsilon_{12} \quad (\sin \chi \cos \chi \quad 2) + \sin^2 \chi \quad \epsilon_{22}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$\sin^2 \chi = (1/2) (1 - \cos 2\chi) ; \quad \cos 2\chi = (1) / ((1 + \tan^2 \chi)^{1/2})$$

$$\cos^2 \chi = (1/2) (1 + \cos 2\chi) ; \quad \sin \chi = (\tan \chi) / ((1 + \tan^2 \chi)^{1/2})$$

Mit der Abkürzung $K = (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4 \epsilon_{12}^2$ ergibt sich:

$$\sin^2 \chi = (1/2) \{ \{ (K)^{1/2} - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \} / (K)^{1/2} \}$$

$$\cos^2 \chi = (1/2) \{ \{ (K)^{1/2} + (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \} / (K)^{1/2} \}$$

$$\sin \chi \cos \chi = (1/2) \{ 1 - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 / K \}^{1/2} = \epsilon_{12} / (K)^{1/2}$$

Damit wird

$$A_{11} = \epsilon_{11} \{ \{ (K)^{1/2} + (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \} / 2 (K)^{1/2} \} + (2 \epsilon_{12}^2 / (K)^{1/2} + \\ \epsilon_{22} \{ \{ (K)^{1/2} - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \} / 2 (K)^{1/2} \}$$

$$A_{11} = (1/2) \{ (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) / (K)^{1/2} + \\ 4 \epsilon_{12}^2 / (K)^{1/2} \} \quad (11.7.1)$$

Es ist

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 2 - (4\pi/N) \{ \gamma_{11} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \} + \gamma_{22} \{ (4\pi/3) \gamma_{11}^{-1} \} \\ (8\pi/3) \gamma_{12}^2 \}$$

wobei $N = \{ (4\pi/3) \gamma_{11}^{-1} \} \{ (4\pi/3) \gamma_{22}^{-1} \} - \{ (4\pi/3) \gamma_{12}^2 \}$ ist.

Setzt man die Werte γ ein, so wird:

$$N = \{ (4\pi/3) (k_1 - k_2 A) - 1 \} \{ (4\pi/3) (k_1 + k_2 A) - 1 \} - (4\pi/3)^2 k_2^2 B^2$$

$$N = \{ (4\pi/3) k_1 - 1 - (4\pi/3) k_2 A \} \{ (4\pi/3) k_1 - 1 + (4\pi/3) k_2 A \} - (4\pi/3)^2 k_2^2 B^2$$

Es wird nun der Ausdruck k_2^2 , ($k_2 = (2/3) (c_1 - c_2)$) vernachlässigt gegenüber k_1^2 , ($k_1 = (4\pi/3) (2c_1 + c_2)$) (Siehe P. Boeder, S. 271!) Damit wird

$$N = \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}^2$$

Eingesetzt erhält man:

$$A_{11} = (1/2) \{ 2 - \{ (4\pi) / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}^2 \} \{ (4\pi/3) \gamma_{22} \gamma_{11} 2 + (-1) (\gamma_{11} + \gamma_{22}) - (8\pi/3) \gamma_{12}^2 k_1 \cancel{k_2^2} + \dots \}$$

Mit $\gamma_{11} \gamma_{22} = k_1^2 - k_2^2 A$; $\gamma_{11} + \gamma_{22} = 2k_1$ folgt:

$$A_{11} = (1/2) \{ 2 - \{ (4\pi) / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}^2 \} 2k_1 \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \} + \dots$$

oder vollständig ausgeschrieben

$$A_{11} = 1 - \{ (4\pi) k_1 / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \} \} + (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 / \{ 2 (K)^{1/2} \} +$$

$$a \quad 4 \epsilon_{12}^2 / \{ 2 (K)^{1/2} \}$$

$$A_{11} = 4 \{ (4\pi/N) k_2^2 A^2 / \{ 2 (K)^{1/2} \} + 2 \{ (4\pi/N) k_2 \}^2 B^2 / (K)^{1/2}$$

$$A_{11} = a + \frac{4 \pi k_2 (A^2 + B^2)^{1/2}}{b \cdot \theta} / \{ (4/3) k_1 - 1 \}^2$$

$$A_{11} = a + b \theta \quad \text{Mit } (A^2 + B^2)^{1/2} = \theta$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= \sum_{l=1}^3 d_{21} d_{21} A_{11} + \sum_{l=1}^3 d_{21} d_{22} A_{12} + \sum_{l=1}^3 d_{21} d_{23} A_{13} \\
 &= d_{21} d_{21} A_{11} + d_{22} d_{21} A_{21} + d_{23} d_{21} A_{31} + \\
 &\quad d_{21} d_{22} A_{12} + d_{22} d_{22} A_{22} + d_{23} d_{22} A_{32} + \\
 &\quad d_{21} d_{23} A_{13} + d_{22} d_{23} A_{23} + d_{23} d_{23} A_{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= \varepsilon_{11} (1/2) \{ \{ (K)^{1/2} - (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \} / (K)^{1/2} \} + (1/2) \\
 &\quad \varepsilon_{22} \{ \{ (K)^{1/2} + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \} / (K)^{1/2} \} - (4/2) (\varepsilon_{12}^2) / (K)^{1/2} \\
 &= (1/2) \{ (-1) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) / K^{1/2} + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - (4 \varepsilon_{12}^2) / (K)^{1/2} \}
 \end{aligned}$$

Das 1. und dritte Glied in den geschweiften Klammern unterscheidet sich gegenüber den entsprechenden Gliedern in A_{11} in Gleichung 1121, S. 89 jeweils nur durch das Vorzeichen. Damit wird

$$A_{22} = a - \{ 4 \{ (4\pi/N) k_2 \}^2 A^2 - 2 B^2 \{ (4\pi/N) k_2 \}^2 \} \{ 1/(K)^{1/2} \}$$

$$A_{22} = a - \{ \{ 4\pi k_2 / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \} \}^2 \} (A^2 + B^2)^{1/2}$$

$$A_{22} = a - b \cdot 0$$

$$A_{12} = \sum_{l=1}^3 d_{12} d_{21} A_{11} + \sum_{l=1}^3 d_{11} d_{22} A_{12} + \sum_{l=1}^3 d_{11} d_{23} A_{13}$$

$$\begin{aligned}
 &= d_{11} d_{21} A_{11} + d_{12} d_{21} A_{21} + d_{13} d_{21} A_{31} + \\
 &\quad d_{11} d_{23} A_{12} + d_{12} d_{22} A_{22} + d_{13} d_{22} A_{32} + \\
 &\quad d_{11} d_{23} A_{13} + d_{12} d_{23} A_{23} + d_{13} d_{23} A_{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \cos \chi (-1) \sin \chi \varepsilon_{11} + (-1) \sin^2 \chi \varepsilon_{12} + \\
 &\quad \cos^2 \chi \varepsilon_{12} + \sin \chi \cos \chi \varepsilon_{22}
 \end{aligned}$$

$$A_{12} = \varepsilon_{12} (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi) + \cos \chi \sin \chi (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})$$

$$= \epsilon_{12} (1/2) 2 \{ (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) / (K) \}^{1/2} + \epsilon_{12} (\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) / (K) \}^{1/2} = 0$$

$A_{12} = 0$, was ja sein muß, da auf die Hauptachsen transformiert wurde.

$$A_{33} = \sum_{i=1}^3 d_{31} d_{31} A_{ii} + \sum_{i=1}^3 d_{31} d_{32} A_{12} + \sum_{i=1}^3 d_{31} d_{33} A_{13}$$

$$= \cancel{d_{31}} + \cancel{d_{33}} \cancel{d_{31}} + \cancel{d_{31}} + \cancel{d_{32}} + \cancel{d_{33}} d_{32} + \cancel{d_{31}} + \cancel{d_{32}} +$$

$$d_{33} d_{33} A_{33}$$

$$A_{33} = 1 \cdot \epsilon_{33} = 1 - 4\pi \epsilon_{33} / \{ (4\pi/3) \epsilon_{33} - 1 \}$$

$$A_{33} = 1 - 4\pi k_1 / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}$$

Der auf Hauptachsen transformierte Tensor würde also die Form annehmen:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} a + b \theta & 0 & 0 \\ 0 & a - b \theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

mit $a = 1 - 4\pi k_1 / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}$

$$b = \frac{4\pi}{3} k_2 / \{ (4\pi/3) k_1 - 1 \}^2$$

$$\theta = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

Faktor 4π fehlt
bei Boeder !

$$n_1 = (\epsilon_1)^{1/2} = (a + b \theta)^{1/2}$$

$$n_2 = (\epsilon_2)^{1/2} = (a - b \theta)^{1/2}, \quad \chi = (1/2) \arctg \left(\frac{B}{A} \right)$$

(Brechungsindices, abhängig von der Funktion θ ; θ ist abhängig von der Schergröße $\alpha = \beta/D$)

Lebenslauf

1.9.1949 geboren in Wuppertal
als Sohn der Eheleute Martha und August Schmitz

1956 bis 1960 Besuch der Volksschule Schützenstraße
in Wuppertal-Barmen

1960-1969 Besuch des Carl-Duisberg-Gymnasiums
in Wuppertal-Oberbarmen

1969 Abitur

3.11.1969 bis . Ersatzdienst beim Caritasverband in Hagen

30.4.1971

1.10.1971 bis Studium der Fachrichtung Allgemeiner Maschinenbau
an der Ruhr-Universität Bochum, Abschluß mit
Diplomprüfung am Inst. für Thermo- und Fluidodynamik
der Ruhr-Universität Bochum

Juli 1977

bis Sept.1977 wissenschaftliche Hilfskraft in der Arbeitsgruppe
"Experimentelle Gasdynamik" am Inst.für Thermo-
und Fluidodynamik der Ruhr-Universität

Sept.1977 bis m.b.V.b. Stelle am Inst. für Thermo- und Fluid-
dynamik, Experimentelle Gasdynamik bei Herrn
Sept.1979 Prof. Dr.rer.nat.W.Merzkirch

Okt.1979 bis wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeits-
gruppe "Experimentelle Gasdynamik" bei Herrn
Sept.1983 Prof. Dr. rer.nat. W.Merzkirch

